أساسيات الإنشاءات

التحليل الإنشائي للمنشآت المحددة استاتيكياً



الدكتور

لطفي عبد السلام القروي

أستاذ مشارك جامعة الفاتح

كلية الهندسة

الدكتور

إبراهيم محمد الفقهي

أستاذ مشارك جامعة 7أكتوبر

كلية الهندسة

أساسيات الإنشاءات

التحليل الإنشائي للمنشآت المحددة استاتيكياً

الدكتور : لطفي عبد السلام القروي
أستاذ مشارك جامعة الفاتح
كلية الهندسة

الدكتور: إبراهيم محمد الفقهي
أستاذ مشارك جامعة 7 أكتوبر
كلية الهندسة

رقم الايـــــداع : 19061 / 2008
الترقيم الدولى : 977-287-847-X

دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان – عابدين – القاهرة
☎ 27954229

دار اشبيليه للطباعة والنشر والتوزيع
بنى وليد – ليبيا
☎ 00218913712204

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله ذي الطول والإنعام. والصلاة والسلام على خاتم النبيين والرسل الكرام.

وبعد ..

بين أيدي أبنائنا طلبة كليات الهندسة بالجامعات والمعاهد التخصصية العليا نضع هذا الكتاب علهم يجدون فيه ضالتهم في دراسة مادة التحليل الإنشائي. وهو كتاب جامع ملخص لهذا المجال لا يتناول التفاصيل إلا التي ذات أهمية وصلة مباشرة ويترك ما هو ثانوي حيث يبحث في كتب أخرى ذات الصلة وبها التفاصيل.

وفي الوقت الذي يستعمل هذا الكتاب اللغة العربية فانه يثريها باستخدام الرموز والأحرف الأجنبية وكذلك بعض التعبيرات بالإنجليزية الشائعة والكثيرة الاستعمال في دراسة العديد من المواد في المجال العلمي وخاصة الهندسي منها. وقد قسم إلى أقسام ثلاثة كل منها يحتوى على المنهج المقرر لدراسة مادة التحليل الإنشائي بجامعة الفاتح بقسم الهندسة المدنية. القسم الأول ويحتوى على المقرر CE203، والقسم الثاني ويحتوى على المقرر CE303، والقسم الثالث ويحتوى على المقرر CE403، كل منها يتبع الآخر في فصول متتابعة. وقسمت هذه الأقسام إلى أبواب يتناول كل منها جزء باختصار وتركيز في الشرح ويتوسع وتعدد في الأمثلة والمسائل المحلولة. وفي نهاية كلّ باب وضعت مجموعة من المسائل والتمارين التي جمعت من امتحانات سابقة. وننصح أبنائنا الطلبة للتمكن والفهم الجيد لهذه المادة، وغيرها من المواد والمواضيع، بأن يروضوا أنفسهم على مذاكرتها بالتركيز أثناء المذاكرة، وإعادة حل الأمثلة والكراسة مفتوحة ثم إعادة حل الأمثلة والكراسة مغلقة, ثم مقارنة الحلول وتصحيح الخطأ منها. وبعد ذلك الإكثار من حل التمارين والمسائل.

ندعوا الله ألعلي القدير القبول

وأن يوفق الجميع للسؤدد والنجاح.

الباب الأول

1

مدخل

1- مدخل

الغرض الأساسي للتحليل الإنشائي هو تحديد مقدار القوى والازاحات لكل عنصر من عناصر المنشأ خلال فترة إدامته, ويقصد بالازاحات ما قد يحدث من تشوه أو ترخيم في الأعضاء الأفقية أو انبعاج في الأعضاء الراسية أو دوران عند المفاصل حيث تلتقي الأعضاء. ويقصد بالتصميم لأي عنصر حساب أبعاد مقطعة وما قد يضاف إليه من مواد كالتسليح مثلا حتى يكون بمكان كل عنصر, ومن ثم كابل المنشأ من أن يضمن سلامة مستعمليه ودون أن يظهر ما يقلق راحتهم وان يكون اقتصاديا.

1-1- أنواع المنشآت

من أنواع المنشات الشائعة والكثيرة الاستعمال المباني الخاصة, والعامة, الكباري, ميادين الأنشطة الرياضة, وأبراج الكهرباء والاتصالات, الكوابل, والأقواس, خزانات المياه والسوائل الأخرى, صوامع الحبوب, الأرضيات والمهابط.

2-1- الأحمال التصميمية

تحدد المواصفات الأحمال التصميمية لأي منشأ, والمواصفات عبارة عن مجموعة من الأسس والنظم الواجب إتباعها لسلامة وصحة المستعملين للمنشأ, وللمواصفات قوة القانون عند اعتمادها من الجهات المختصة في الدولة, ومواصفات المباني تحدد الحد الأدنى للأحمال التصميمية وما يشابها من معامل الامان وكذلك الاجهادات التي يسمح لأي عنصر أو عضو في المبنى من أن يتعرض لها وكذلك الأحمال المسموح بها, كما تحتوي كذلك على المعادلات المختلفة التي تستعمل في تصميم المقاطع المختلفة للعناصر في المنشأ والتفاصيل الخاصة بأي منشأ.

3-1- أنواع الأحمال

الأحمال التي يتعرض لها أي منشأ خلال فترة حياته تنقسم إلي قسمين أساسيين هما:

1-3-1- الأحمال الميتة

وتشمل الأحمال الميتة أوزان أجزاء التي تظل على حالتها دون تغير في المقدار أو المكان للمنشأ طوال فترة حياته والتي منها أوزان أعضاء المنشأ وكذلك التوصيلات الثابتة لمنشأ. وأوزان الأعضاء لمنشأ تحسب بعد إتمام عملية التحليل الإنشائي والوصول إلى معرفة مساحات القطاعات للعناصر المختلفة وبالتالي يمكن حساب أوزانها, والخبرة وتكرار التصميم للمنشات من العوامل المهمة والمساعدة لتحديد أبعاد وأوزان المقاطع للأعضاء المختلفة لأي منشأ.

2-3-1- الأحمال الحية:

تشمل الأحمال الحية كل ما يتعرض له المنشأ من أحمال خلال فترة حياته وزمن استعماله الافتراضي بحيث تكون غير ثابتة المقدار أو المكان على المنشأ, ومن أمثلة هذه الأحمال الأفراد المستعملين للمنشأ والأثاث, والرافعات بالورش والمصانع لنقل ورفع الأشياء الثقيلة من مكان إلي آخر, السيارات بجميع أنواعها على بلاطات الرصف والطرق والكباري وكذلك القطارات, والرياح, والزلازل, والأمطار لها تأثير مباشر على المباني والمنشات المختلفة وتعتبر من الأحمال الحية التي تسببها الطبيعة, وتحتوي المواصفات على قدر كبير من المعلومات التي يمكن الاستفادة منها والتقيد بها لتقدير الأوزان الحية لأي منشأ, حيث تحدد هذه المواصفات مقادير الأوزان الحية والأماكن الحرجة لتأثيرها على المنشأ

التي ينتج عنها أعلى قيمة ممكنة للاجهادات في الأعضاء المختلفة للمنشأ وكذلك معاملات الامان التي تؤخذ في الاعتبار عند التصميم والتحليل.

1-4- التحليل والتأكد من النتائج:

يتوفر عدة طرق لتحليل أي منشأ, ويمكن استخدام أي منها في التحليل واستعمال طريقة أخرى لمراجعة النتائج والتأكد من صحتها, وفي الوقت الحاضر مع توفر أجهزة الحاسوب يمكن استخدامها لتوفير الكثير من الجهد والوقت لإتمام عملية التحليل الإنشائي, كذلك السرعة في إجراء العمليات الحسابية التي توفرها الآلات الحاسبة اليدوية لمراجعة المعطيات والنتائج.

2 الباب الثاني

ردود الفعل

2- ردود الفعل:

يقصد بردود الفعل مقاومة الأحمال والاجهادات التي تتعرض لها نقاط التثبيت في المنشأ الناتجة عن انتقال الأحمال خلال العناصر والأعضاء المختلفة للمنشأ إلى أن تصل إلى نقاط التثبيت والتي تسمى أحيانا بالكراسي, وكما سبق دراسته في مواضيع أخرى من مجالات المعرفة فان الاتزان يتم في حالة أي منشأ عند توفر المعادلات الستة العامة التالية:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

وهى تمثل ثلاثة معادلات تعبر عن أن محصلة القوى في اتجاه المحاور السينية تؤول إلى الصفر وثلاثة معادلات تعبر عن أن محصلة العزوم حول هذه المحاور تؤول هي الأخرى إلى الصفر. وتختزل هذه المعادلات الستة والتي تعبر عن الاتزان في الفراغ إلى ثلاثة فقط، في حالة تبسيط حالة الاتزان إلى المستوى، وهي:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

الفراغ 3-D

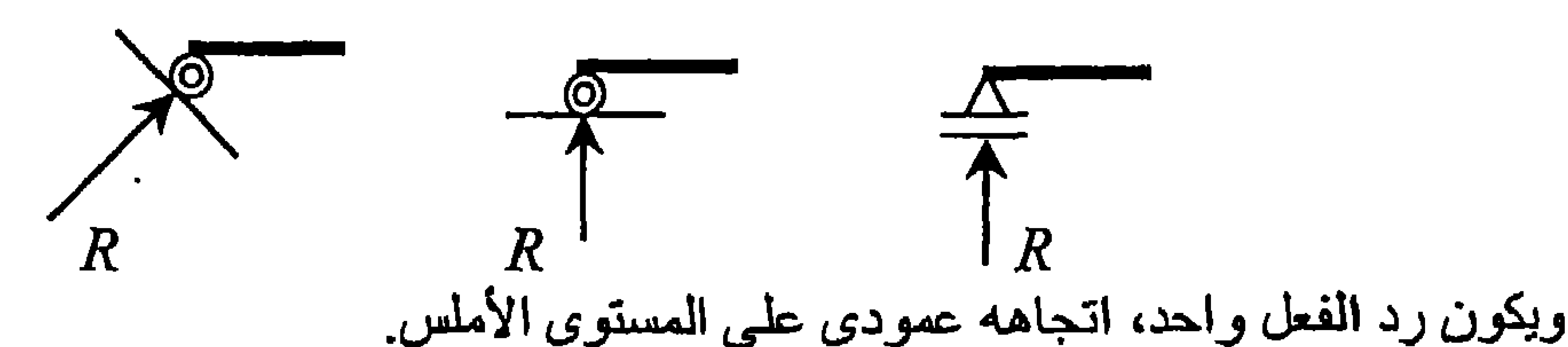
المستوى xy

2-1- الكراسي أو نقاط التثبيت

للاهتمام بنوع الكراسي أو نقاط التثبيت أهمية قصوى حيث أن على هذه العناصر من المنشأ دور القيام بتماسك وربط المنشأ ببعضه حتى يتم عمل المنشأ كوحدة متكاملة. ثم من بعد ذلك معرفة تحديد نوع رد الفعل لكل من هذه النقاط أو الكراسي.

2-1-1 مفصل على مستو أملس

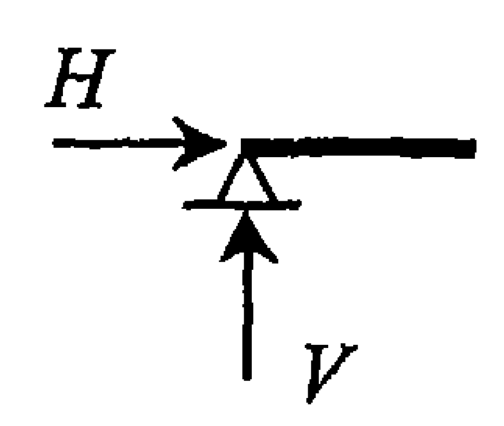
تبسط بالرموز والأشكال التالية:



ويكون رد الفعل واحد، اتجاهه عمودي على المستوى الأملس.

2-1-2 مفصل ثابت

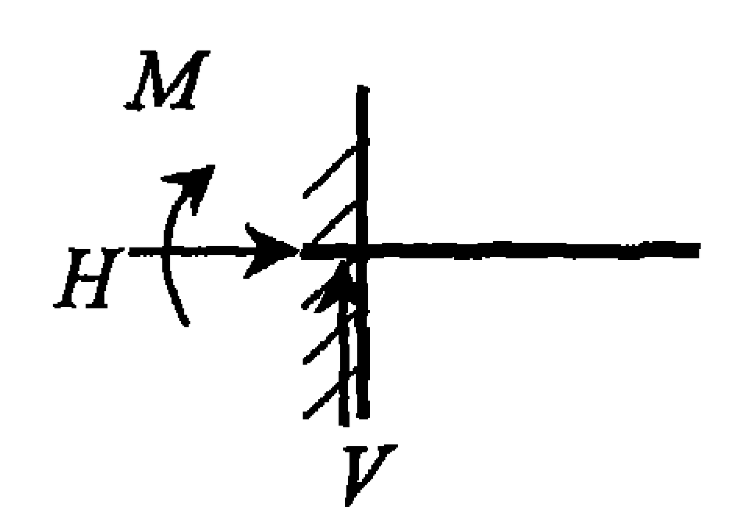
يبسّط بالرّمز التالي:



ويمكن نقل الأحمال أو مقاومتها برد فعل يمكن تحليله إلى مركبتين متعامدتين, أفقية ورأسية.

3-1-2 كرسي أو نقطة تثبيت ثابتة

ويكون رد الفعل مقاوما لأية قوة أو عزم. ويبسّط بالشكل التالي:



2-2 الاتزان الهندسي وتحدّدية المنشأ واستقراره

الاتزان الهندسي يقصد به أن المنشأ يظل على حالة السكون بعد تحميله دون حدوث أي تغير في اتجاهات أعضائه. وأن هذه الأعضاء لها من المتانة والجساوة ما يجعلها تحتفظ بأطوالها قبل وبعد التحميل.

ويقصد بكون المنشأ محدد استاتيكيا ومستقرا إذا كان المنشأ متزنا هندسيا، وأن عدد ردود الأفعال مكافئا لعدد معادلات الاتزان المتوفرة. أما إذا كان عدد معادلات الاتزان يزيد عن عدد ردود الأفعال فان المنشأ غير مستقر وهو قابل للانهيار أو الحركة إذا تعرض إلى أي أحمال عليه. وإذا كان عدد المعادلات للاتزان المتوفرة أقل من عدد ردود الأفعال فان المنشأ يعرف بأنه غير محدد استاتيكيا, ولحساب ردود الفعل في هذه الحالة يتم الرجوع إلى الخواص الطبيعية لأعضاء المنشأ، مثل المساحة، وعزم القصور الذاتي، ونوع المادة التي يتكون منها المنشأ، لتكوين معادلات إضافية كما سيأتي لاحقا.

1-2-2 درجة التّحدّدية D_f

إذا كان m = عدد الأعضاء .

r = عدد ردود الأفعال

j = عدد المفاصل

c = عدد الشروط (أو المفاصل) الداخلية والتي توفر معادلات إضافية بمعرفة قوة داخلية (قص أو قوة محورية أو عزم) عند نقطة.

فدرجة التحدّدية للمنشأ تكون باستخدام المعادلات التالية حسب نوع المنشأ:

*** الهياكل المفصلية:**

$$D_f = m + r - 2j$$

والتقييم بالعين المجرّدة شرط أساسي ومكمّل للحكم على استقرارية المنشأ من عدمها.

**** الكمرات والأطر:**

$$D_f = 3m + r - 3j - c$$

ويكون المنشأ محدّد استاتيكيا إذا كانت $D_f = 0$

ويكون المنشأ غير محدّد استاتيكيا إذا كانت $D_f > 0$

أما إذا كانت $D_f < 0$ فان المنشأ غير مستقر.

مثال:

للهيكل المصلي الموضح، بين إذا كان محدّدا استاتيكيا وحالة استقراره هندسيا.



الحل:

$m = 13, r = 3 \;\&\; j = 8$

$D_f = m + r - 2j$

$= 13 + 3 - 2(8) = 0$

المنشأ محدّد استاتيكيا ويتضّح من المشاهدة بالعين المجردة أنه لا يمكنه الحركة وبالتالي فهو مستقر.

مثال:

للهيكل المصلي الموضح، بين إذا كان محدّدا استاتيكيا وحالة استقراره هندسيا.

الحل:

$m = 9, r = 3 \;\&\; j = 6$

$D_f = m + r - 2j$

$= 9 + 3 - 2(6) = 0$

المنشأ محدّد استاتيكيا ويتضّح من المشاهدة بالعين المجردة أنه لا يمكن أن يكون مستقرا لاحتمال انطباق المفاصل $a\ b\ c\ \&\ d$ على بعضها لأنه لا يوجد ما يمنع حدوث ذلك. وبالتالي فالمنشأ غير مستقر.

ملاحظات مهمة:

1- يمكن الحكم على استقرارية الهيكل المفصلي إذا كانت الأعضاء متصلة ببعضها مكونة مثلثات وبالتالي يتم ضمان عدم إزاحة المفاصل وابتعادها عن بعضها.

2- في المثالين السابقين يمكن القول أن المنشأين محدّدان ومستقران خارجيا، بينما المنشأ الثاني غير مستقر داخليا.

مثال:

وضح إذا كان الهيكل المفصلي المجاور محدّد استاتيكيا ومستقرا هندسيا أم لا.



الحل:

$$m = 9, r = 5 \& j = 8$$
$$D_f = m + r - 2j$$
$$= 9 + 5 - 2(8) = -2$$
$$< 0$$

المنشأ غير مستقر وكونه محدّد استاتيكيا أم لا فلا يفيد في شيء.

لاحظ أن المفصل الثابت عند a له رد فعل واحد فقط حيث مثبت به الوصلة ab التي ينتج عنها رد فعل واحد اتجاهه على امتداد الوصلة لذلك يحسب رد الفعل عنده بواحد فقط.

مثال:

للكمرة المستمرة الموضحة، أذكر إذا كانت محدّدة استاتيكيا أم لا، ووضح حالتها من ناحية الاستقراريّة.



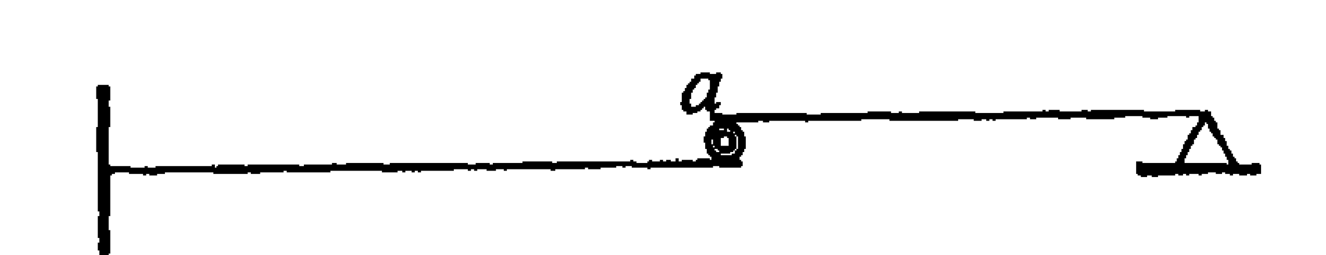
الحل:

$$m = 2, r = 4, c = 1 \& j = 3$$
$$D_f = 3m + r - 3j - c$$
$$= 6 + 4 - 1 - 3(3) = 0$$

العارضة محدّدة استاتيكيا. وحيث أنها لا يمكنها الحركة وثابتة فإنها مستقرة.

مثال:

للمنشأ الموضح، أذكر إذا كان محدّد استاتيكيا أم لا، ووضّح حالته من ناحية الاستقراريّة.



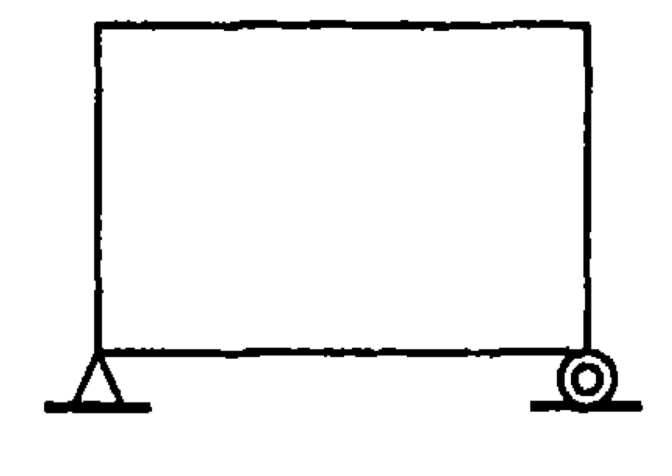
الحل:

$$m = 2, r = 5, c = 2 \& j = 3$$
$$D_f = 3m + r - 3j - c$$
$$= 6 + 5 - 2 - 3(3) = 0$$

العارضة محدّدة استاتيكيا. وحيث أنها لا يمكنها الحركة وثابتة فإنها مستقرة.

لاحظ أن المفصل a يمكنه نقل قوة رأسية فقط وبذلك يتوفر عنده شرطان هما انعدام كل من العزوم والقوة الأفقية.

مثال:
للمنشأ الموضح أوجد درجة تحدديّته.

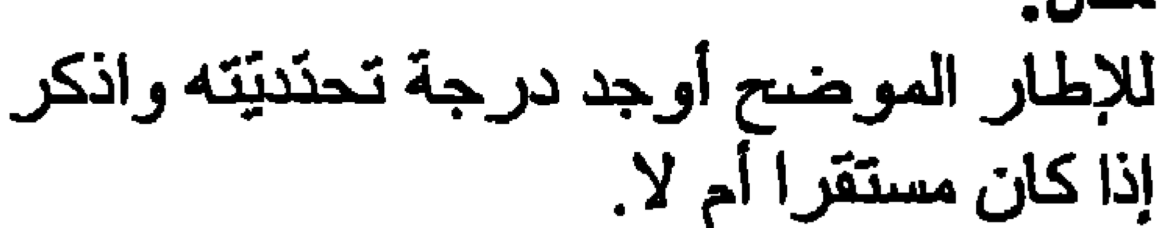


الحل:

$$m = 4, r = 3, c = 0 \& j = 4$$
$$D_f = 3m + r - 3j - c$$
$$= 12 + 3 - 0 - 3(4) = 3$$

الإطار الموضح مستقر لثباته وعدم إمكانية الحركة لأي جزء فيه. وهو غير محدّد استاتيكيا للدرجة الثالثة. ويلاحظ أن هذا الإطار محدّد استاتيكيا من الخارج (أي من حيث نقاط التثبيت) ولكنه غير محدّد استاتيكيا داخليا. كما يجب ملاحظة أن أي شكل أو حلقة مغلقة ينتج عنها ثلاث درجات من عدم التحدديّة لذى وجب التذكر والاهتمام.

مثال:



للإطار الموضح أوجد درجة تحدديّته واذكر
إذا كان مستقرا أم لا.

الحل:

$$m = 9, r = 8, c = 0 \& j = 8$$
$$D_f = 3m + r - 3j - c$$
$$= 27 + 8 - 0 - 3(8) = 11$$

يتضّح أن المنشأ غير محدد استاتيكيا للدرجة الحادية عشر. وبالعودة إلى الملاحظة المشار إليها في المثال السابق نجد أن درجة التحدّدية الخارجية الناتجة عن نقاط التثبيت هي 5 وأنه هناك حلقتان مغلقتان ينتج عنهما 6 درجات من عدم التحدّدية وبالتالي نتج أن درجة عدم التحدّدية تساوي 11.

مثال:
للمنشأ الموضح أوجد درجة تحدديّته.

الحل:

$$m = 4, r = 3, c = 3 \& j = 4$$
$$D_f = 3m + r - 3j - c$$
$$= 12 + 3 - 3 - 3(4) = 0$$

الإطار الموضح مستقر ومحدّد استاتيكيا.

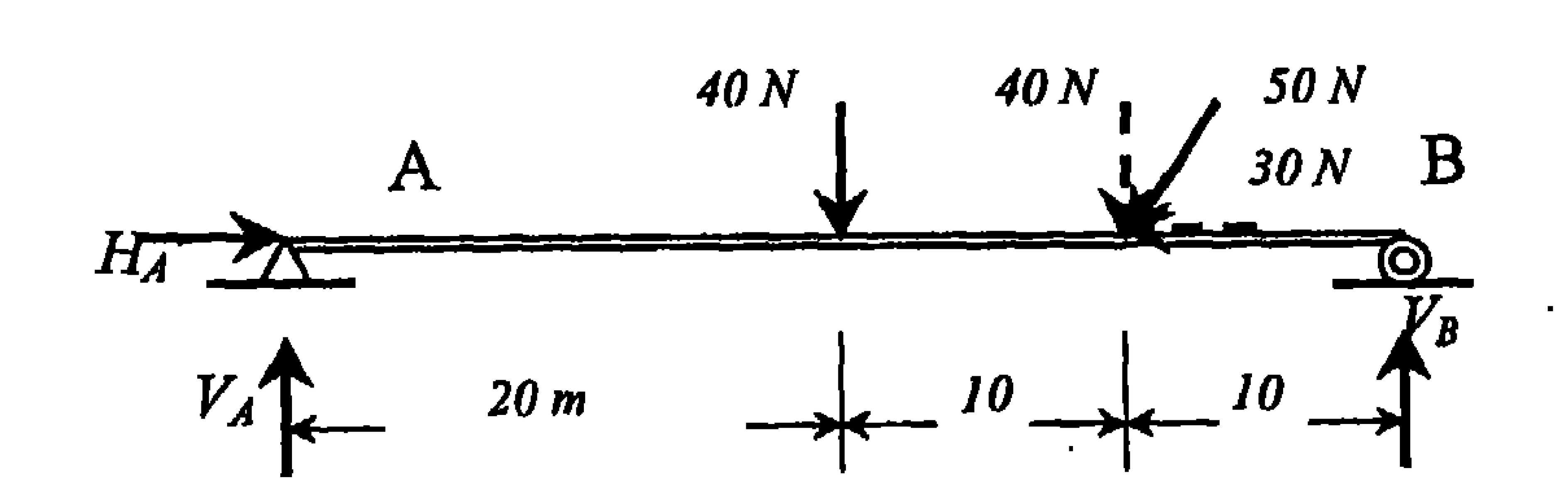
3-2 تبسيط المنشأ

للمساعدة على تسهيل تقديم المنشأ يبسّط شكله بعدم توضيح التفاصيل حيث لا لزوم لها. وإنما يبسّط برسم خطوط تمثل محاور أعضائه المختلفة. وعلى هذه الخطوط يرسم أسهم تمثل أنواع القوى الداخلية، من قص وعزم انحناء وقوة محورية، ويكون اتجاهها افتراضي يعكس إذا كانت الإجابة بعد التحليل والحساب سالبة الإشارة للنتيجة.

4-2- خطوات حساب ردود الأفعال للكمرات والأطر

1- ارسم شكلا مبسّطا عليه جميع الأحمال الخارجية.
2- حسب نوع نقطة التثبيت (الكرسي) افرض اتجاه رد الفعل بسهم.
3- حلل أي قوة مائلة إلى مركبتين أحداهما أفقية والأخرى رأسية.
4- يمكن التعامل مع المحصلة لأي حمل موزع حسب شكل التوزيع لحساب ردود الفعل.
5- من معادلات الاتزان الثلاثة، عوض في المعادلة التي يمكن أن تحتوى على مجهول واحد وحدد قيمة هذا المجهول.
6- انتقل إلى تكوين معادلة أخرى ولتكن معادلة العزوم حول نقطة يمر بها أحد أو أكثر من المجاهيل باستثناء أحد المجاهيل وحدد قيمة هذا المجهول.
7- انتقل إلى التعويض في المعادلة الثالثة والأخيرة لإيجاد آخر المجاهيل من ردود الفعل.
8- حول نقطة لم تستعمل في الخطوات السابقة أوجد المجموع الجبري للعزوم $\sum M$ وتأكد من أنها تؤول إلى الصفر لمراجعة النتائج والتحقق من قيمتها.

مثال:
أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت للعارضة الموضحة.



الحل:

$$\curvearrowright \Sigma M @ A = 0 \Rightarrow 40(20) + 40(30) - V_B(40) = 0 \Rightarrow V_B = 50\,N \uparrow$$

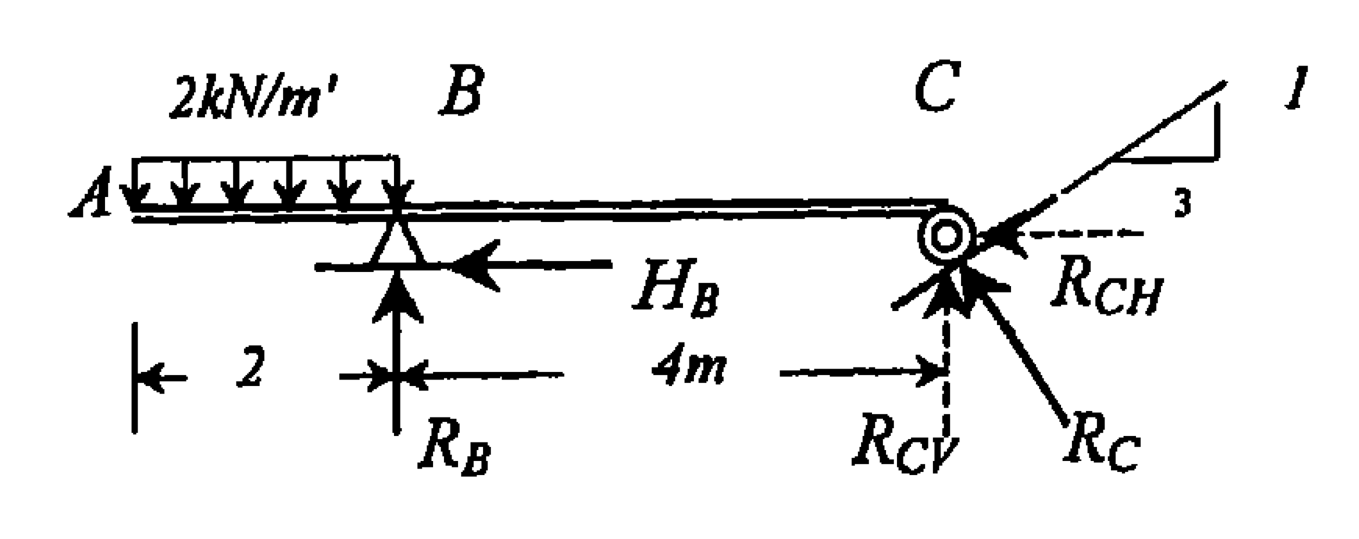
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A - 30 = 0 \Rightarrow H_A = 30\,N \rightarrow$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - 40 - 40 + 50 = 0 \Rightarrow V_A = 30\,N \uparrow$$

تحقيق:

$$\curvearrowright \Sigma M @ B = 30(40) - 40(20) - 40(10) = 0 \quad Check$$

مثال:
للكمرة الموضحة، أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت.



الحل:

$$R_{CH} = \frac{1}{\sqrt{10}} R_C \qquad R_{CV} = \frac{3}{\sqrt{10}} R_C$$

$\curvearrowleft \Sigma M @ C \; = \; R_B(4) - 2(2)(5) \; = 0 \;\Rightarrow\; R_B = 5 \text{ kN} \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_{CV} + 5 - 2(2) = 0 \;\Rightarrow\; R_{CV} = -1.0 \text{ kN}$

therefore, $R_{CV} = 1.0 \text{ kN} \downarrow \qquad R_C = \frac{\sqrt{10}}{3} R_{CV} = \frac{\sqrt{10}}{3} \text{kN} \searrow$

and $R_{CH} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad R_C = \frac{1}{3} \text{kN} \rightarrow$

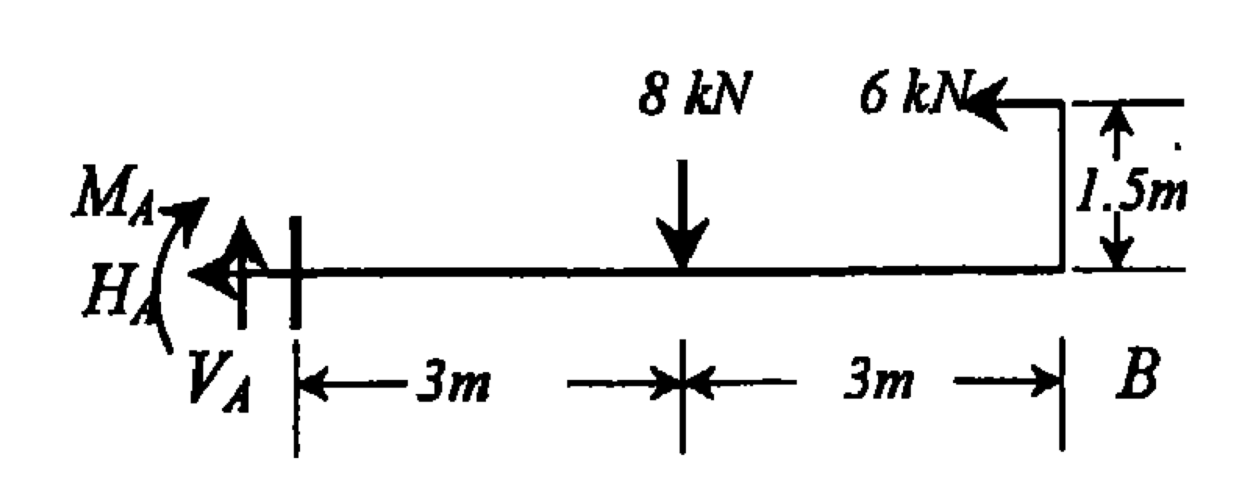
$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; H_B - \frac{1}{3} = 0 \;\Rightarrow\; H_B = \frac{1}{3} \text{kN} \rightarrow$

تحقيق:

$\curvearrowleft \Sigma M @ B = 1(4) - 2(2)(1) = 0 \qquad$ Check

~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:
للكابولي الجاسي الموضح، أحسب ردود الفعل عند نقطة التثبيت.



الحل:

$\curvearrowleft \Sigma M @ A = \; M_A + 8(3) - 6(1.5) \; = 0 \;\Rightarrow\; M_A = -15.00 = 15.00 \text{ kN.m} \; \circlearrowleft$

$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; H_A + 6 = 0 \;\Rightarrow\; H_A = -6 \text{ kN} = 6\text{kN} \rightarrow$

$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_A - 8 = 0 \;\Rightarrow\; V_A = 8.0 \text{ kN} \uparrow$

تحقيق:

$\curvearrowleft \Sigma M @ B = 8(6) - 15 - 8(3) - 6(1.5) = 0 \qquad$ Check
~~~~~~~~~~~~~~~



مثال:

أوجد ردود الفعل للإطار المرفق.

الحل:

$$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0$$

$$= 4(20) - 20V_B - 3(16) + 10(8)$$

$$\Rightarrow \quad V_B = 5.6\ kN \uparrow$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 5.6 - 5 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 3.4\ kN \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 10 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 7\ kN \leftarrow$$

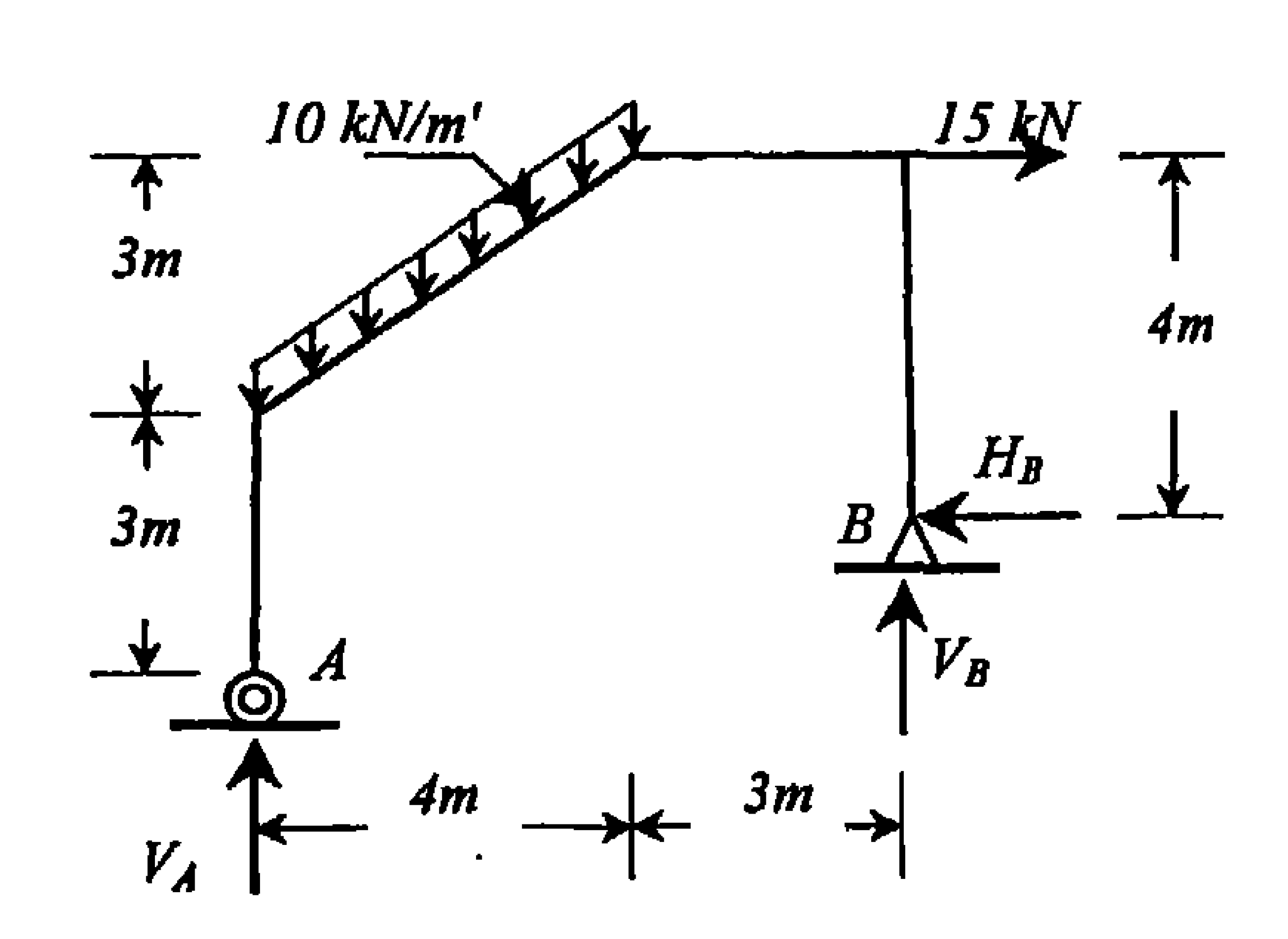
تحقيق:

$$\curvearrowleft \Sigma M @ B = 3.4(20) + 10(8) - 5(20) - 3(16) = 0 \qquad \text{Check}$$

~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

للإطار الموضح أحسب ردود الفعل عند نقاط التثبيت.



الحل:

$$\curvearrowleft \Sigma M @ B = 0 \Rightarrow$$

$$7V_A - 10(4)(2+3) + 15(4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_A = 20\ kN \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \quad H_A = 15\ kN \leftarrow$$

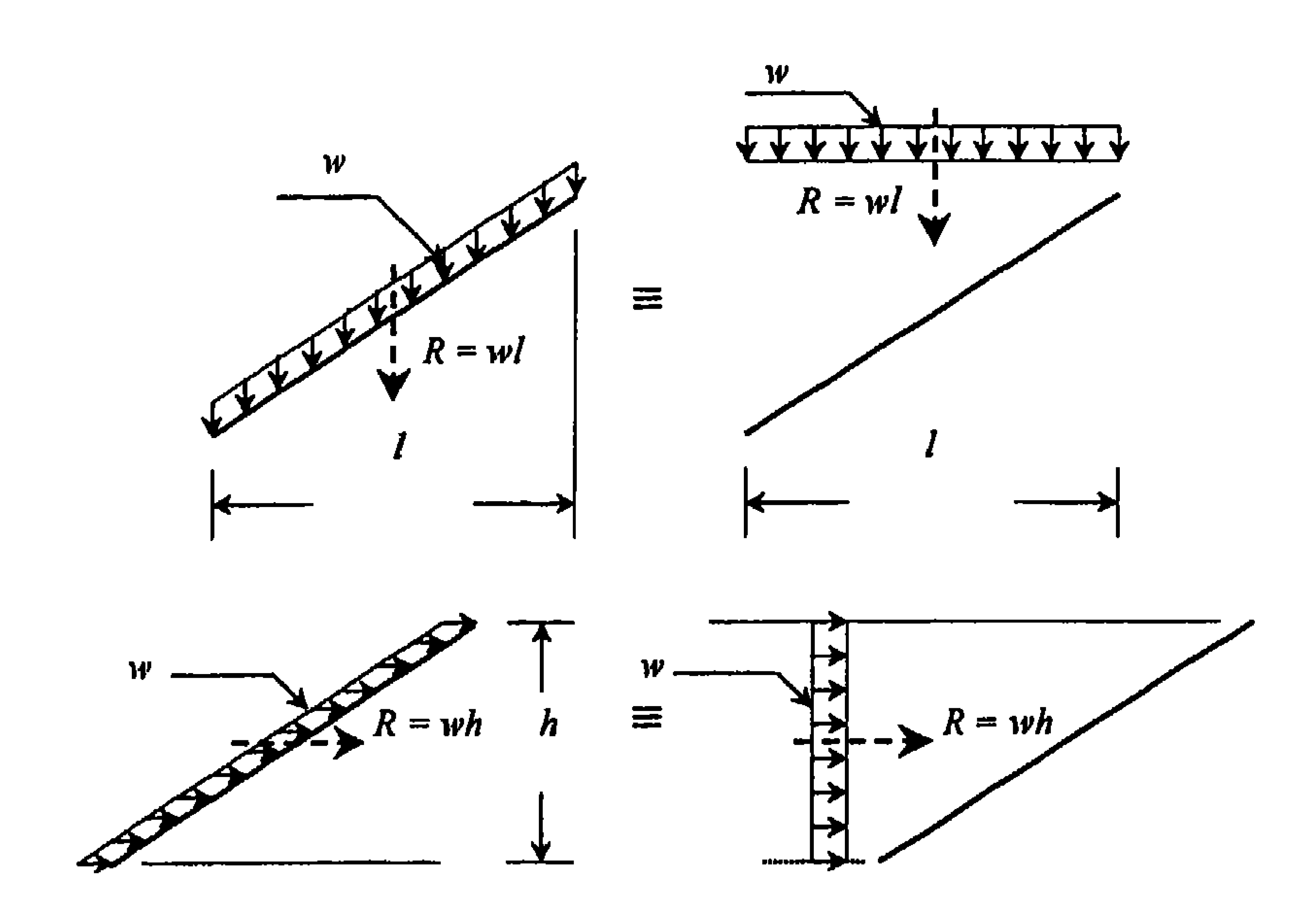
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - 10(4) + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 20\ kN \uparrow$$

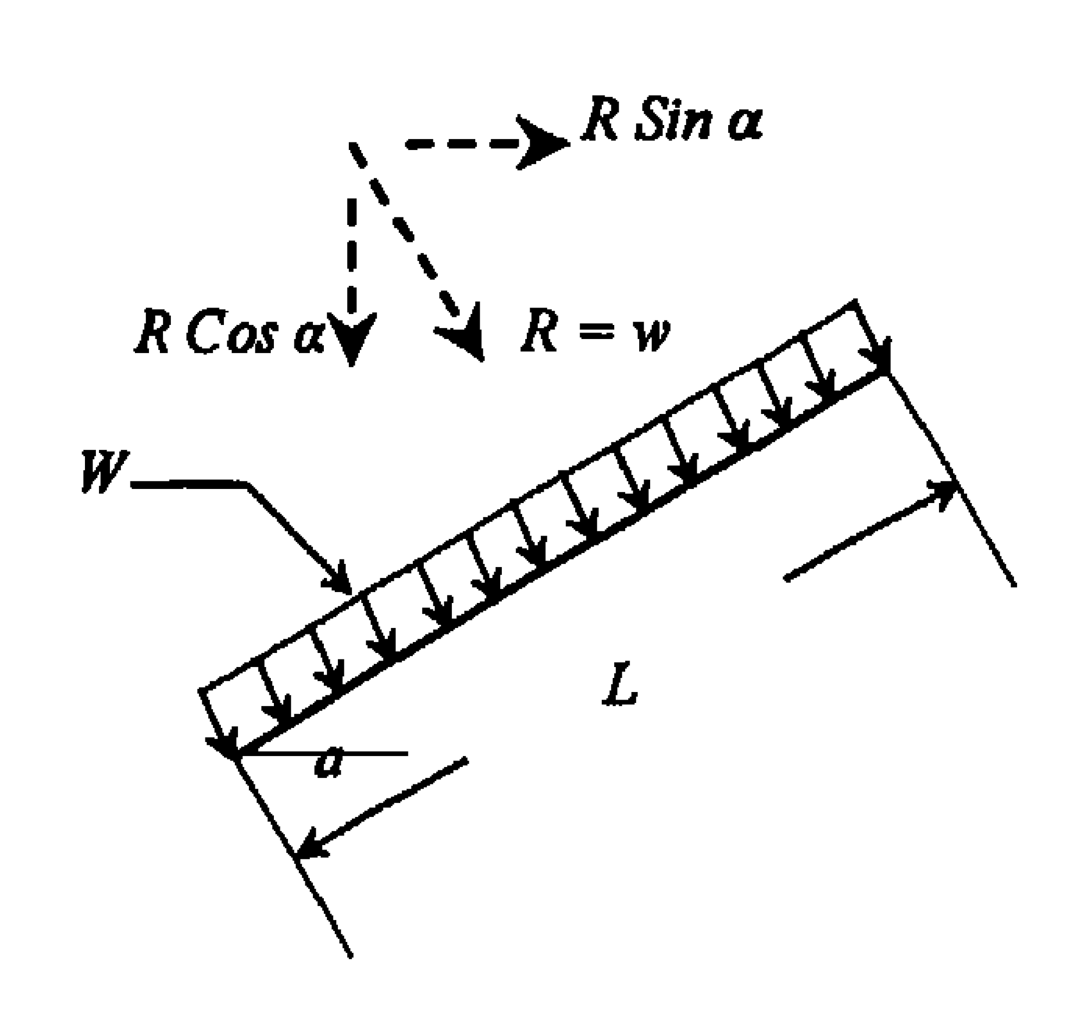
تحقيق:

$$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 10(4)(2) + 15(6) - 15(2) - 20(7) = 0 \qquad \text{Check}$$
~~~~~~~~~~~~~~~

1-4-2 الأحمال الموزّعة على عضو مائل

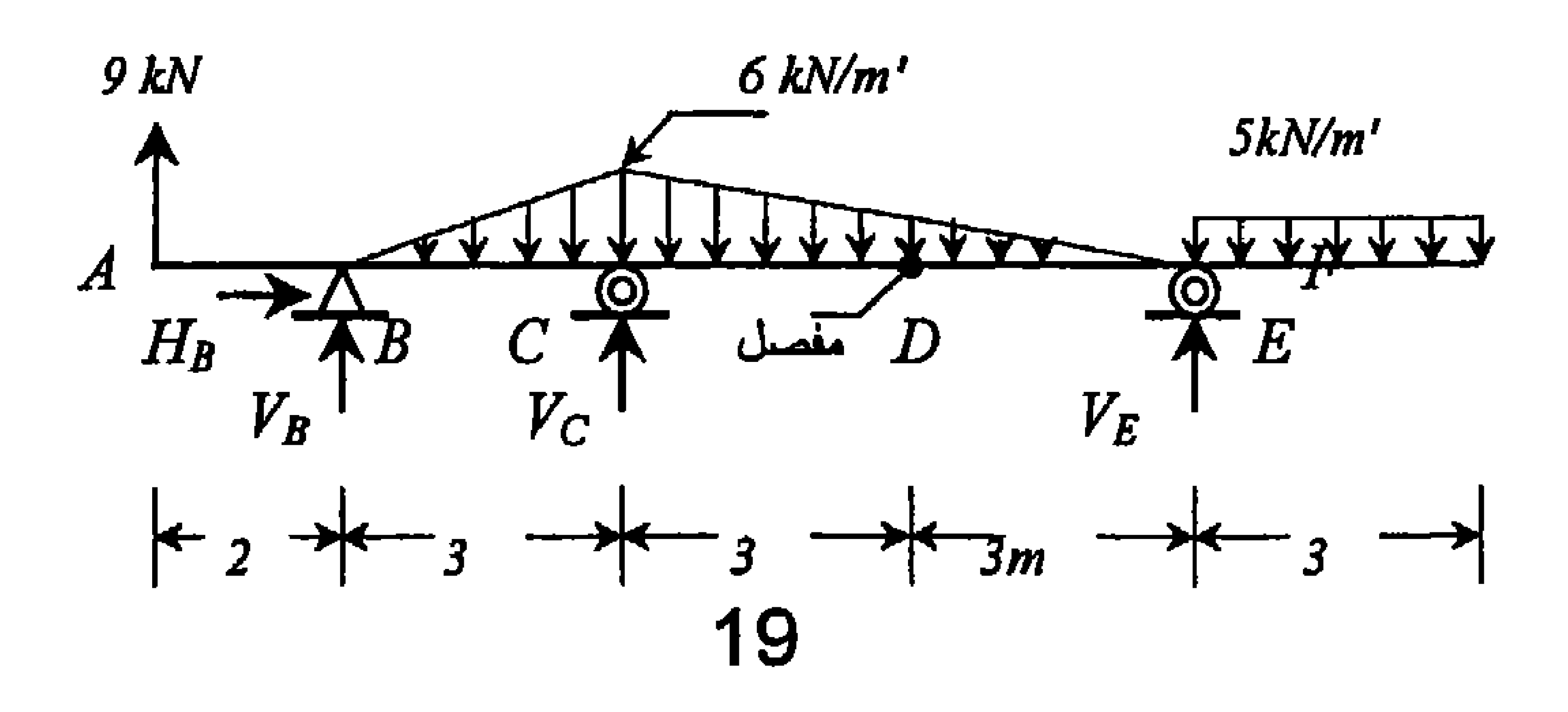
عند التعامل مع أحمال موزعة على عضو مائل في منشأ من الأهمية بمكان الانتباه إلى مركبات هذه الأحمال. الأشكال التالية ستكون مفيدة ومساعدة لفهم حالات التحميل المختلفة.





مثال:

للعتبة المستمرة الموضحة، أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت.



الحل:

$\curvearrowleft \Sigma M @ D\ (right) = 0 \Rightarrow 5(3)(3+1.5) + \quad (1) - 3V_E = 0$

$\therefore V_E = 24\ kN \uparrow$

$\curvearrowleft \Sigma M @ D$ (لكامل المنشأ) $= 0 \quad \Rightarrow$

$$9(2) + \frac{6\times3}{2}(2) + \frac{6\times6}{2}(5) + 5(3)(10.5) - 24(9) - 3V_C = 0$$

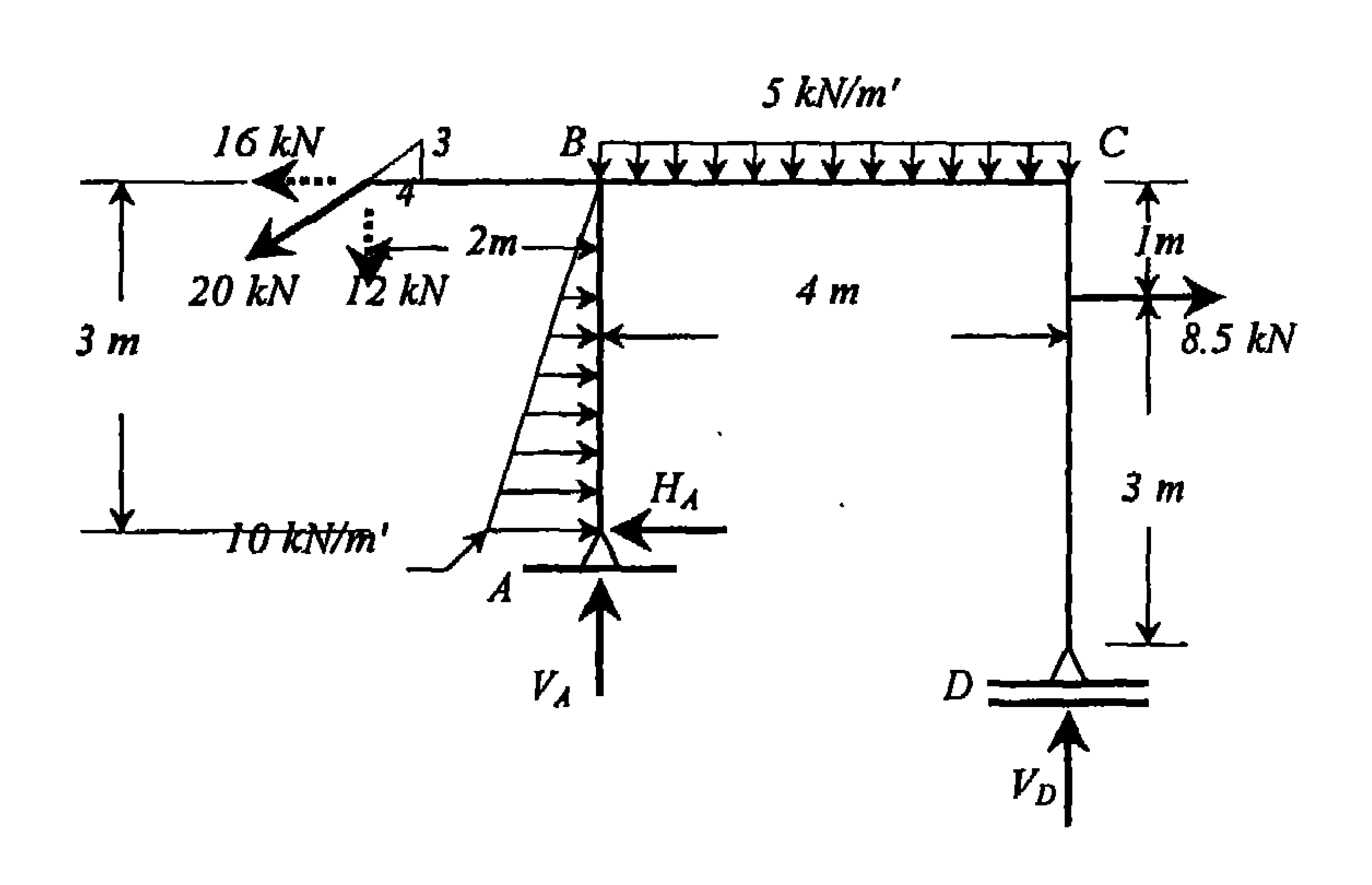
$\therefore V_C = 22.5\ kN \uparrow$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + 22.5 + 24 - \frac{6\times3}{2} - \frac{6\times6}{2} - 15 + V_B = 0$$

$\therefore V_B = -13.5 \quad \Rightarrow \quad V_B = 13.5\ kN \downarrow$

~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:
أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت للإطار الموضح.



الحل:

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow$

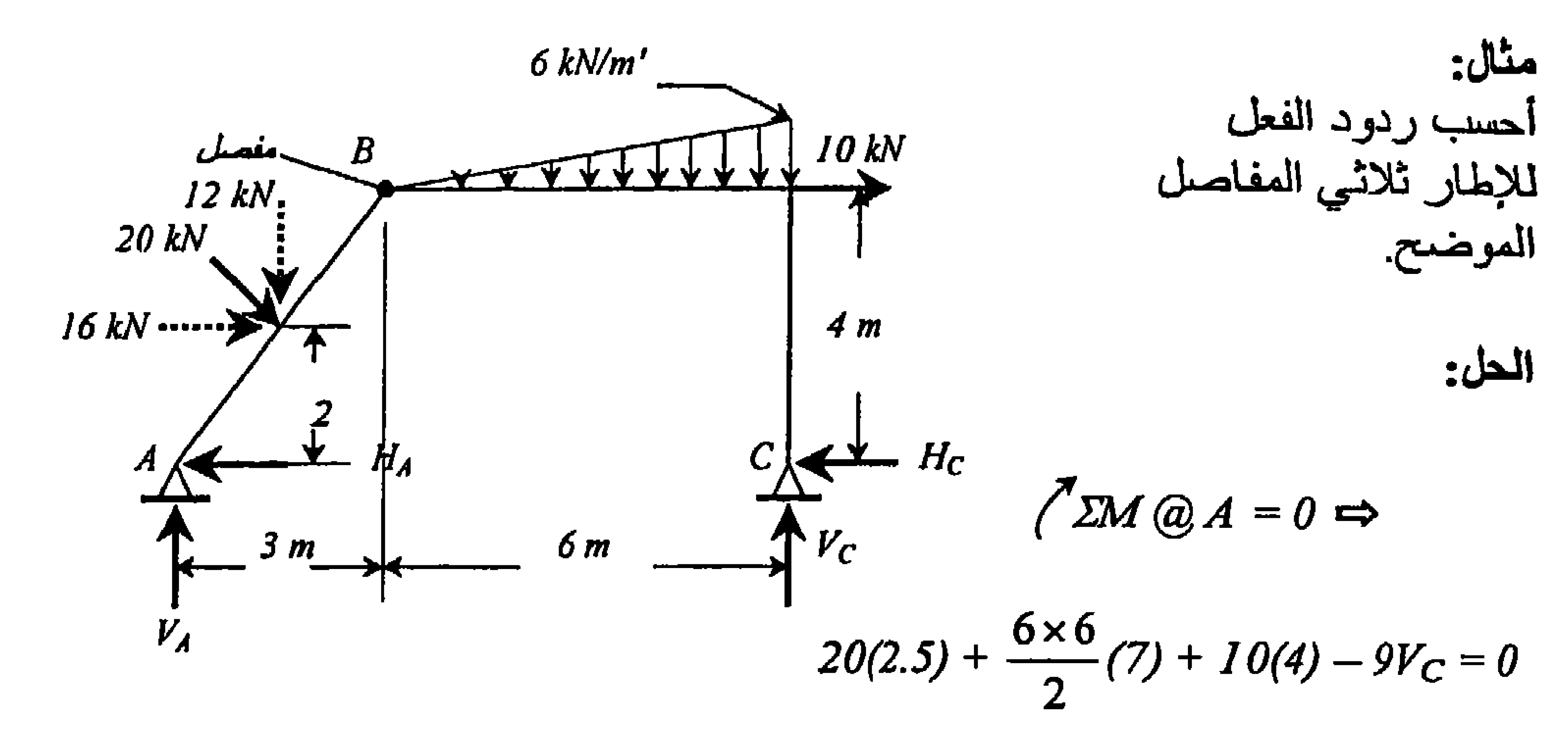
$-16 + 8.5 - H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 7.5\ kN \leftarrow$

$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0 \Rightarrow \quad (1) - 12(2) - 16(3) + 5(4)(2) + 8.5(2) - V_D = 0$

$\therefore V_D = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 12 - 5(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 32\ kN$
~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:
أحسب ردود الفعل للإطار ثلاثي المفاصل الموضح.



الحل:

$$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0 \Rightarrow$$

$$20(2.5) + \frac{6\times6}{2}(7) + 10(4) - 9V_C = 0$$

$$\therefore V_C = 24\ kN \uparrow$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 12 - \frac{6\times6}{2} + 24 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_A = 6\ kN$$

$\curvearrowleft \Sigma M @ joint\ B$ (من جهة اليسار) $= 0 \quad \Rightarrow \quad 4H_A + 6(3) - 20(2.5) = 0$

$$\therefore \quad H_A = 8\ kN \quad \leftarrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 + 10 - 8 - H_C = 0 \Rightarrow \quad H_C = 18\ kN \quad \leftarrow$$

~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:
أوجد ردود الفعل للمنشأ الموضح عند نقاط التثبيت.

الحل:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_C - 100 = 0$$

$$\therefore \quad H_C = 100\ kN \rightarrow$$

$\curvearrowleft \Sigma M @ D$ (من جهة اليسار) $= 0 \quad \Rightarrow \quad 6V_A - 30(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 20\ kN \uparrow$

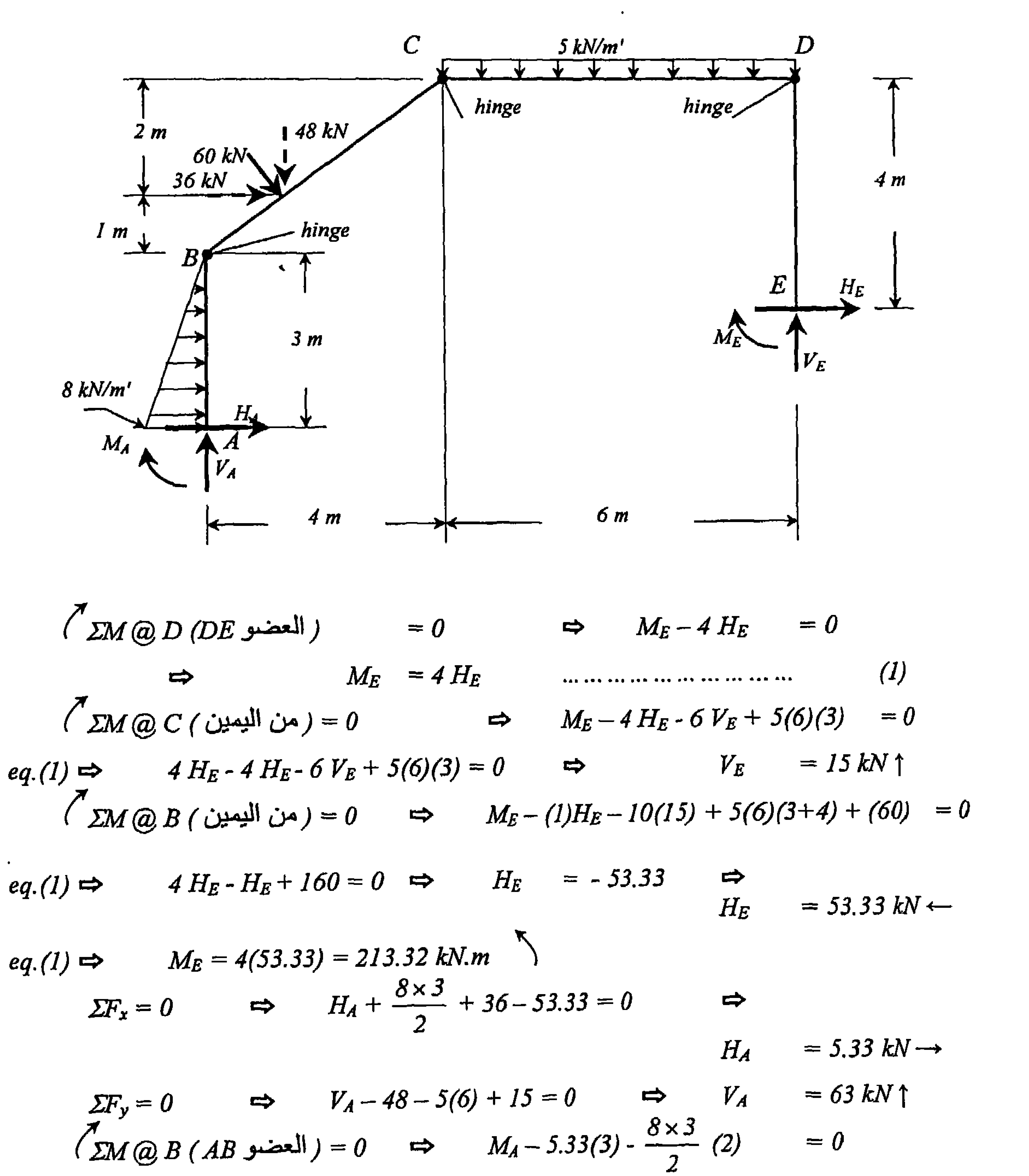
$$\curvearrowleft \Sigma M @ \quad C = 0 \Rightarrow 20(9) - 30(7) - 20(3)(1.5) + 60(3) - 100(2) + M_C = 0$$

$$\therefore \quad M_C = 140\ kN.m \curvearrowright$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C + 20 - 30 - 20(3) - 60 = 0 \Rightarrow \quad V_C = 130\ kN \uparrow$$
~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:
للمنشأ الموضح، أحسب ردود الفعل عند كراسي التثبيت.

الحل:



$\curvearrowleft \Sigma M @ D$ (DE العضو) $= 0 \Rightarrow M_E - 4H_E = 0$

$\Rightarrow M_E = 4H_E$ .... (1)

$\curvearrowleft \Sigma M @ C$ (من اليمين) $= 0 \Rightarrow M_E - 4H_E - 6V_E + 5(6)(3) = 0$

$eq.(1) \Rightarrow 4H_E - 4H_E - 6V_E + 5(6)(3) = 0 \Rightarrow V_E = 15\ kN \uparrow$

$\curvearrowleft \Sigma M @ B$ (من اليمين) $= 0 \Rightarrow M_E - (1)H_E - 10(15) + 5(6)(3+4) + (60) = 0$

$eq.(1) \Rightarrow 4H_E - H_E + 160 = 0 \Rightarrow H_E = -53.33 \Rightarrow H_E = 53.33\ kN \leftarrow$

$eq.(1) \Rightarrow M_E = 4(53.33) = 213.32\ kN.m \ \curvearrowleft$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A + \frac{8 \times 3}{2} + 36 - 53.33 = 0 \Rightarrow H_A = 5.33\ kN \rightarrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - 48 - 5(6) + 15 = 0 \Rightarrow V_A = 63\ kN \uparrow$

$\curvearrowleft \Sigma M @ B$ (AB العضو) $= 0 \Rightarrow M_A - 5.33(3) - \frac{8 \times 3}{2}(2) = 0$

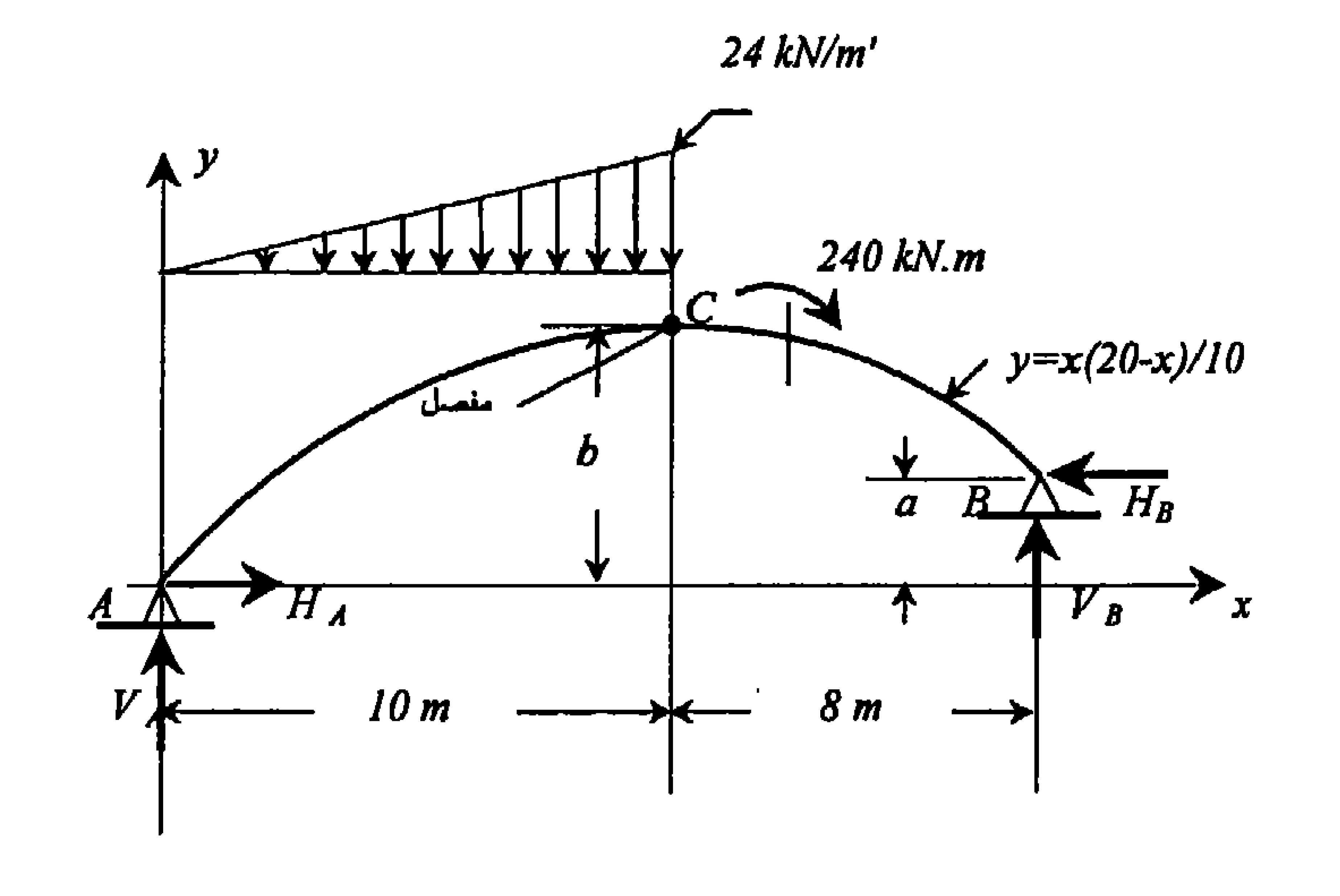
$\Rightarrow M_A = 40\ kN.m \ \curvearrowright$

2-4-2 الأقواس ثلاثيّة المفاصل

العوارض والمنشآت الأفقية يتولد فيها ردود أفعال عند نقاط التثبيت رأسية وموازية عندما تحمل رأسيا. في الأقواس تتولد ردود أفعال أفقية نتيجة تحميلها رأسيا. هذه الأحمال وردود الأفعال تعمل وكأنّ تأثيرها على القوس يجعله يميل إلى الاعوجاج ليكون أفقيا. وحتى لا يحدث أي إزاحة أفقية لنقاط التثبيت وجب تثبيتها لمنع مثل هذه الحركة. وتتميز الأقواس ثلاثية المفاصل كونها محدّدة استاتيكيا الأمر الذي يجعلها تتخطى مشاكل أيّ ضعف في الأساسات أو نواتج حدوث أيّ هبوط بها. حيث أن أيّ هبوط في أساسات أيّ منشأ غير محدد استاتيكيا يحدث عنه اجهادات ثانوية ذات تأثير يجب أخذها في الاعتبار عند التصميم ويجب ألا تهمل. وتتميز الأقواس كذلك بأن اجهادات العزوم فيها تكون أصغر من العزوم في الكمرات الأفقية لأن ردود الفعل عند نقاط التثبيت تولد عزوما مخالفة للعزوم المتولدة بسبب الأحمال الخارجية في اتجاه الجاذبية. ولعل أهم ميزة توفرها الأقواس إمكانيتها تغطية مساحة كبيرة دون الحاجة إلى أعمدة في وسط المبنى الأمر المطلوب في منشآت مهمة عدة كالمطارات والصالات والميادين الرياضية والمسارح.

مثال:

للقوس الموضح، أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت.



الحل:

بالتعويض في معادلة المنحنى عن قيمة $x = 18$ نجد أن

$a = (20 - 18) = 3.6\ m$

وعن $x = 10$ ينتج أن

$b = (20 - 10) = 10\ m$

$\curvearrowright \Sigma M @ C$ من الجهة اليمنى $\Rightarrow$

$240 + 6.4\, H_B - 8\, V_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 30 + 0.8\, H_B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\curvearrowright \Sigma M @ A = 0 \quad \Rightarrow \quad + 240 - 3.6\, H_B - 18\, V_B = 0$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن $H_B = 27.78\ kN \leftarrow \quad \& \quad V_B = 52.22\ kN \uparrow$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 27.78\ kN \rightarrow$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - \qquad + 52.22 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 67.78\ kN \uparrow$

تحقيق:

$\curvearrowright \Sigma M @ C$ (من جهة اليسار) $= 67.78(10)(10) - 27.78(10) - \qquad = 0 \quad$ check

مثال:

للقوس ثلاثي المفاصل الموضح، احسب ردود الفعل عند نقاط التثبيت.

الحل:

$\circlearrowleft \Sigma M @ A = 0 \quad \Rightarrow \quad - 35\, V_B = 0$

$\therefore V_B = 40\ kN \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - \qquad + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 65\ kN \uparrow$

$@\ x = 20 \quad \Rightarrow \quad y = \qquad = 10\ m$

$\circlearrowleft \Sigma M @ C$ (من اليمين) $= 0 \quad \Rightarrow \quad 10 H_B - 40(15) = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 60\ kN \leftarrow$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 60\ kN \rightarrow$

مثال:

أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت للقوس الموضح.

الحل:

بالتعويض في معادلة القوس نجد أن

$D_x = 9.33m.$

$\circlearrowleft \Sigma M @ A = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(5)(2.5) + 20(9.33) - 10\, V_B = 0$

$\therefore V_B = 23.66\ kN \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 4(5) - 20 + 23.66 = 0$

$\therefore V_A = 16.34\ kN \uparrow$

$\circlearrowleft \Sigma M @ C = 0 \quad \Rightarrow$

$20(4.33) - 23.66(5) + 2H_B = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 15.85\ kN \leftarrow$

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 15.85 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 15.85\ kN \rightarrow$



مثال:

الشكل الموضح قوس دائري نصف قطره 10 أمتار. أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت.

الحل:

$a = \qquad = 8\ m$

$\curvearrowleft \Sigma M @ D\ (right) = 0 \Rightarrow$

$10 H_B - 10 V_B = 0 \Rightarrow \qquad H_B = V_B$

$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0 \Rightarrow 12(8)(4) + 6 H_B - 18 H_B = 0$

$\therefore H_B = 32\ kN \leftarrow \quad and \quad V_B = 32\ kN \uparrow$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \qquad H_A = 32\ kN \rightarrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - 12(8) + 32 = 0 \Rightarrow V_A = 64\ kN \uparrow$

تحقيق:

$\curvearrowleft \Sigma M @ D\ (left) = 64(8) - 32(4) - 12(8)(4) = 0 \quad check$

~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

الشكل الموضح لقوس دائري نصف قطره يساوى 6 أمتار. أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت.

الحل:

$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0 \Rightarrow 5(3)\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2(3)\sqrt{3}\ V_B = 0$

$\therefore \quad V_B = 6.5\ kN \uparrow$

$\curvearrowleft \Sigma M @ C$ (من اليمين) $= 0 \Rightarrow 3H_B - 3\sqrt{3}(6.5) = 0 \Rightarrow H_B = 11.25\ kN \leftarrow$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \qquad H_A = 11.25\ kN \rightarrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A - 5(3)\sqrt{3} + 6.5 = 0 \Rightarrow V_A = 19.48\ kN \uparrow$

تحقيق:

$\curvearrowleft \Sigma M @ C\ (left) = 19.48(3)\sqrt{3} - 5(3)\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - 11.25(3) \approx 0 \quad check$
~~~~~~~~~~~~~~~~

الباب الثالث

3

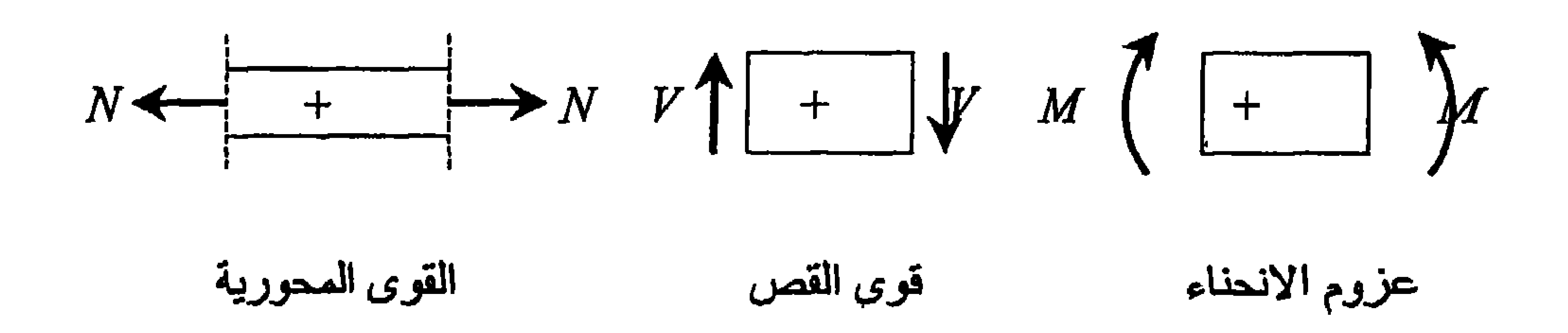
القوى الدّاخليّة

3- القوى الدّاخليّة

تنقل الأجزاء المختلفة من المنشأ كالأعتاب أو الكمرات والأعمدة ألأجهادات التي تسببها الأحمال على المنشأ عن طريق القوى الداخلية. وتعرف القوى الداخلية عند مقطع في المنشأ ثنائي الأبعاد في المستوى السيني بالقوة المحورية، وهي القوة التي يكون اتجاهها على امتداد المحور الطولي للعضو المستقيم أو في اتجاه المماس للعضو المنحنى وتكون شدا أو ضغطا. وقوة القص، وهي القوة العمودية على المحور الطولي للعضو المستقيم أو عمودية على المماس في حالة أن يكون العضو منحنى، ويعرف القص بأنه موجب إذا كان المجموع الجبري للقوى الخارجية يسار المقطع اتجاهه إلى أعلى. وقوة عزم الانحناء، وهي القوة التي تجعل عضو المنشأ يتعرض للف حول محور عمودي على المستوى مسببة أحد سطحي العضو أن يتعرض للشد في حين يتعرض السّطح الآخر للضغط، ويكون عزم الانحناء موجبا إذا كان السطح السفلي للعضو في حالة شد. وقيمة عزم الانحناء هي المجموع الجبري للعزوم الناتجة عن القوى الخارجية يسار أو يمين المقطع المطلوب معرفة القوى الداخلية فيه.

1-3 اصطلاح الإشارات

توضّح الأشكال التالية الإشارة الموجبة للقوى الداخلية عند مقطع تحت الدراسة لأي عضو في منشأ. واختلاف اتجاه هذه الإشارات يدلّ على كون القوة الداخلية سالبة.



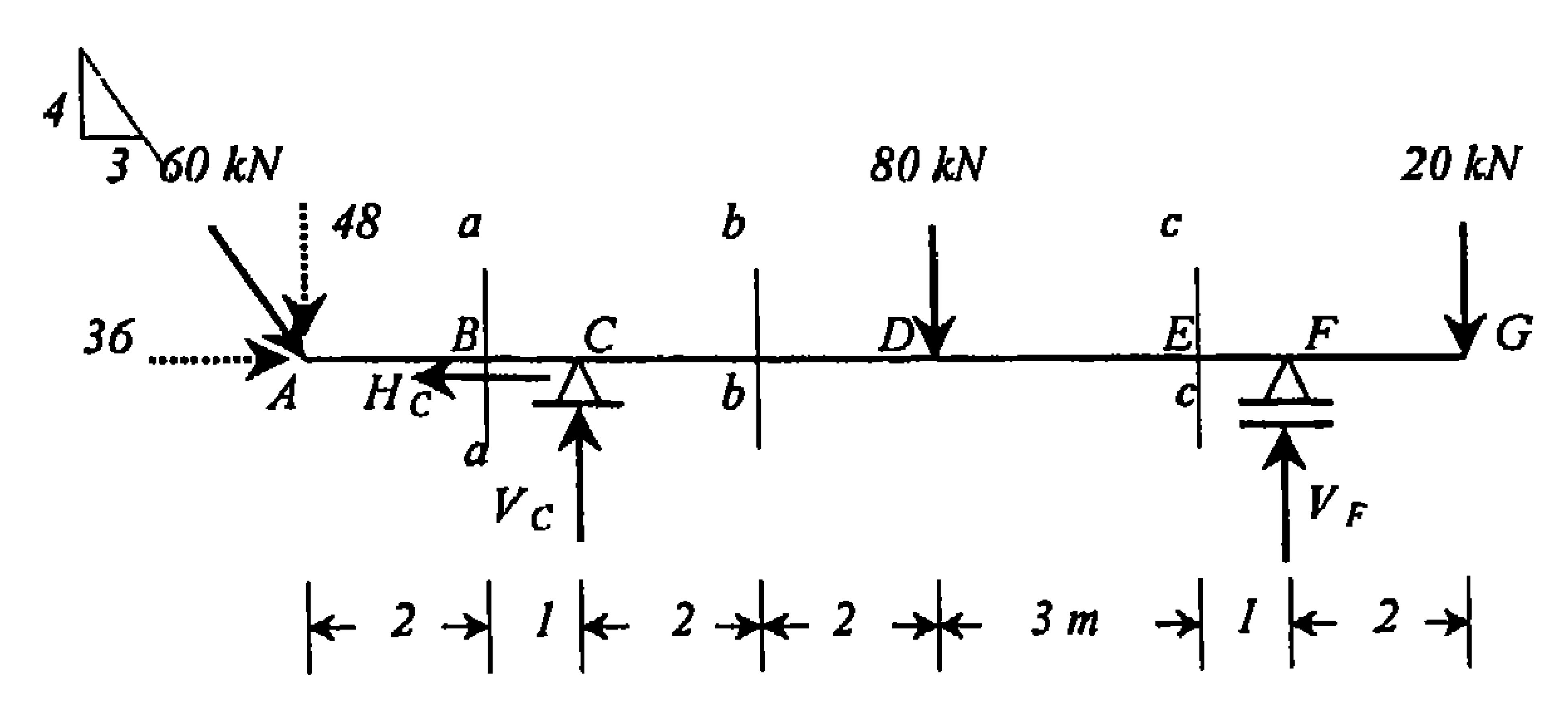
القوى المحورية — قوى القص — عزوم الانحناء

2-3 خطوات حساب القوى الدّاخليّة عند مقطع

1- أحسب ردود الفعل عند نقاط الارتكاز.
2- مرّر مقطعا في المكان المطلوب حساب القوى الداخلية فيه يقسم المنشأ إلى قسمين.
3- اعتبر أحد القسمين وعليه القوى الخارجية وردود الأفعال والقوى الداخلية حيث أصبح هذا القسم متزنا تحت تأثير جميع هذه القوى.
4- بتطبيق معادلات الاتزان على هذا القسم، استنتج القوى الداخلية عند المقطع المطلوب.

مثال:

للكمرة الموضحة أوجد القوى الداخلية عند المقاطع (a-a), (b-b) & (c-c).



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \quad H_C = 36\ kN \leftarrow$

$\Sigma M @ C = 0 \quad \Rightarrow 80(4) - 48(3) + 20(10) - 8V_F = 0$

$\Rightarrow \qquad V_F \quad = 47\ kN \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \qquad \Rightarrow \quad V_C - 48 - 80 - 20 + 47 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 101\ kN \uparrow$

عند المقطع (a-a) :
فرض ألاتجاه الموجب للقوى الداخلية
كما موضح بالشكل للجزء AB .

$\Sigma F_x = 0 \qquad \Rightarrow N_{a-a} + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{a-a} = -36$

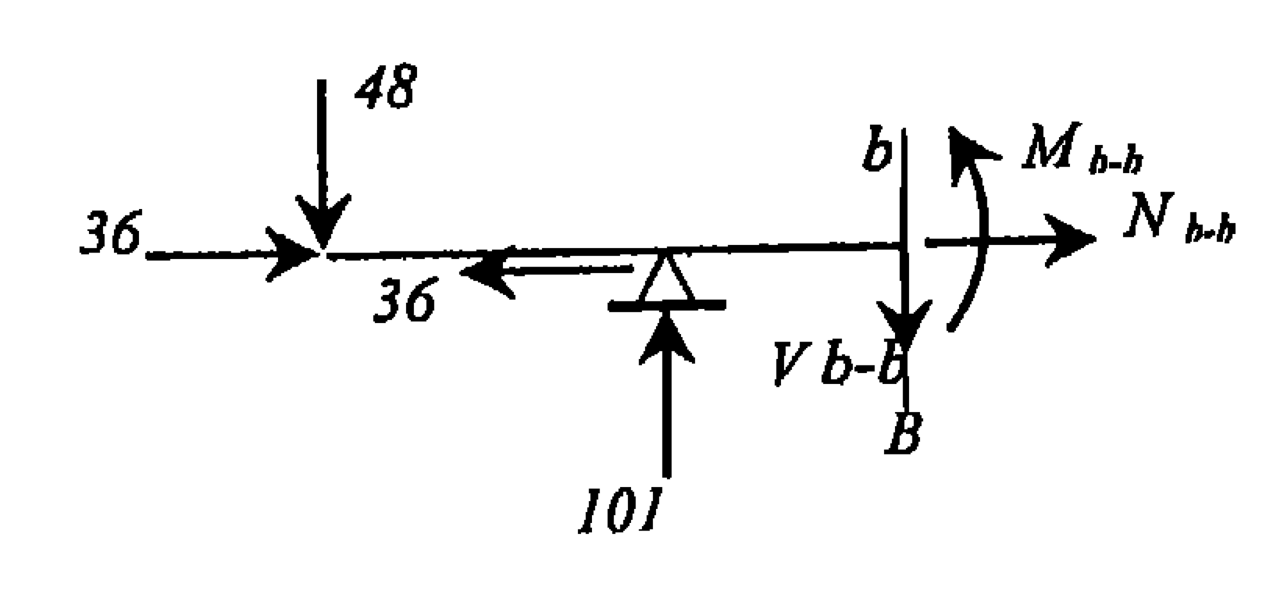
$\therefore \qquad N_{a-a} = 36\ kN \leftarrow$ أي أنها ضغط

$\Sigma F_y \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_{a-a} - 48 = 0 \quad \Rightarrow$

$V_{a-a} \ = -48\ kN$ أي أن القص إلى أعلى عند يمين المقطع

$\Sigma M @ (a\text{-}a) = 0 \Rightarrow -48(2) - M_{a-a} = 0 \Rightarrow M_{a-a} = -96\ kN.m$

@ المقطع (b-b) :
اعتبر الجزء BD من العارضة وفرض الاتجاه الموجب للقوى الداخلية عند المقطع. ومن تطبيق معادلات الاتزان وجد أن:



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{b-b} + 36 - 36 = 0 \Rightarrow N_{b-b} = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -V_{b-b} - 48 + 101 = 0 \quad \Rightarrow$

$\therefore \qquad V_{b-b} = 53\ kN \downarrow$ أي أن القص موجب واتجاهه إلى أسفل (يمين المقطع)

@ المقطع (c-c) :
اعتبر الجزء EG من العارضة وفرض الاتجاه الموجب للقوى الداخلية عند المقطع. ومن تطبيق معادلات الاتزان وجد أن:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{c\text{-}c} = 0 \Rightarrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_{c\text{-}c} - 20 + 47 = 0 \Rightarrow$

$\therefore V_{c\text{-}c} = -27\ kN \downarrow$ أي أن اتجاه القص إلى أسفل يسار المقطع

$\Sigma M @ (c\text{-}c) = 0 \Rightarrow M_{c\text{-}c} + 20(3) - 47(1) = 0 \Rightarrow M_{c\text{-}c} = 13\ kN.m$

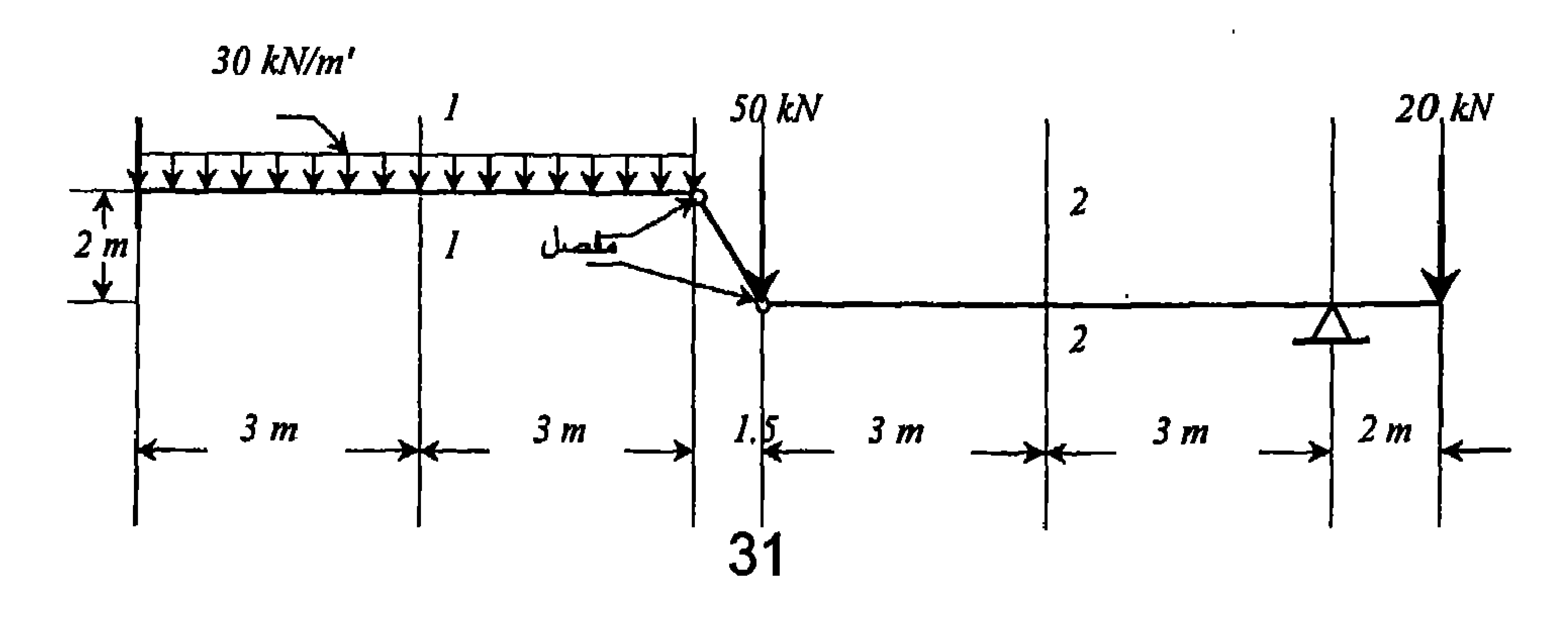
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

تمارين:

للقوس الثلاثي المفاصل الموضح، أوجد القوى الداخلية عند المقطع (a-a).

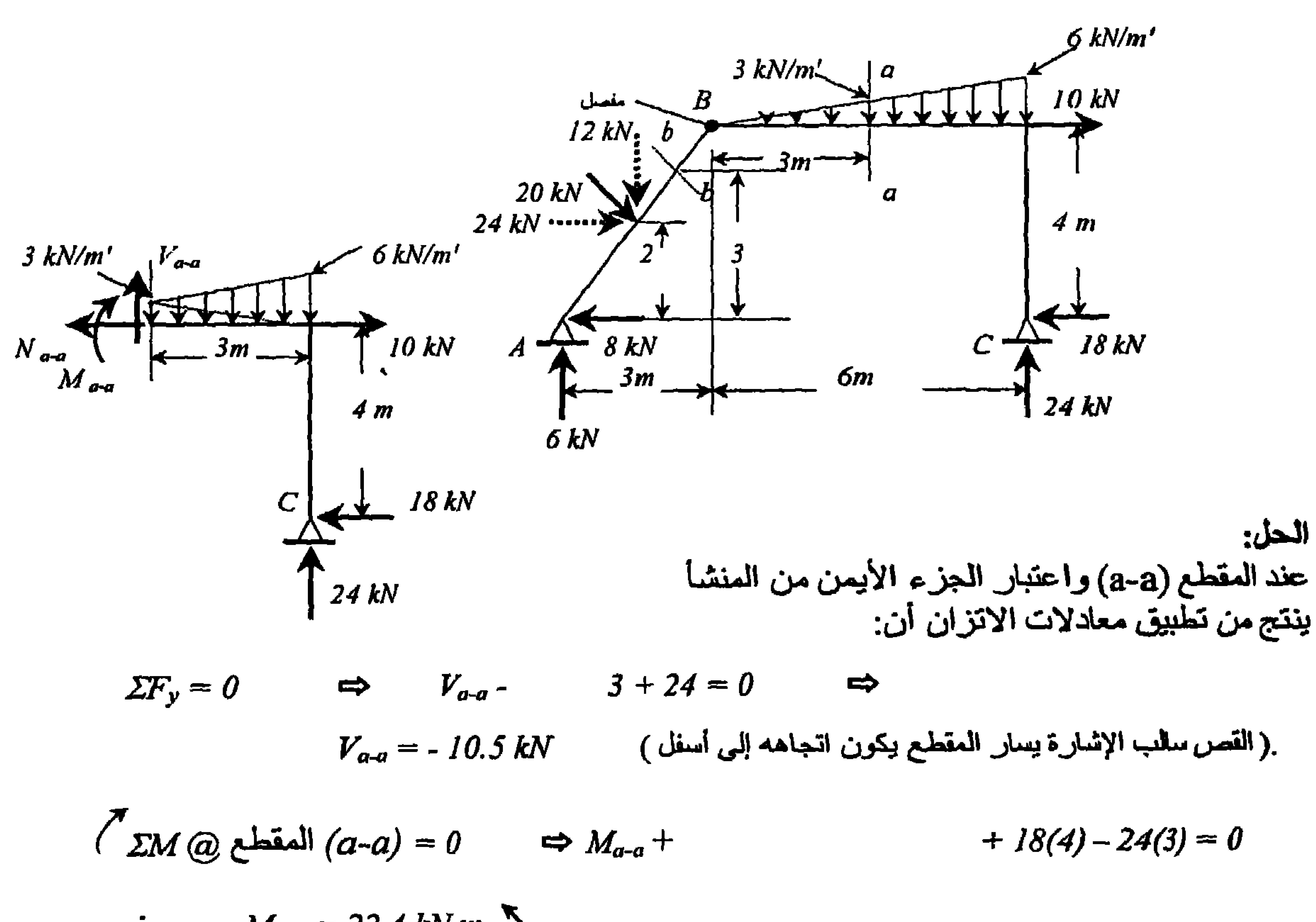
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

للشكل الموضح، أوجد القوى الداخلية عند المقاطع (1-1) & (2-2).



مثال:

للمضلع الموضح المبين عليه ردود أفعال نقاط التثبيت، أوجد القوى الداخلية عند المقاطع (b-b) , (a-a).

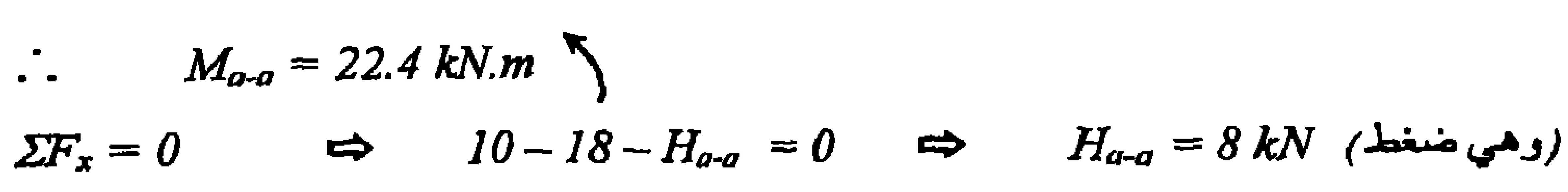


الحل:

عند المقطع (a-a) واعتبار الجزء الأيمن من المنشأ ينتج من تطبيق معادلات الاتزان أن:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{a-a} - \qquad 3 + 24 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_{a-a} = -10.5\ kN$$ (القص سالب الإشارة يسار المقطع يكون اتجاهه إلى أسفل).



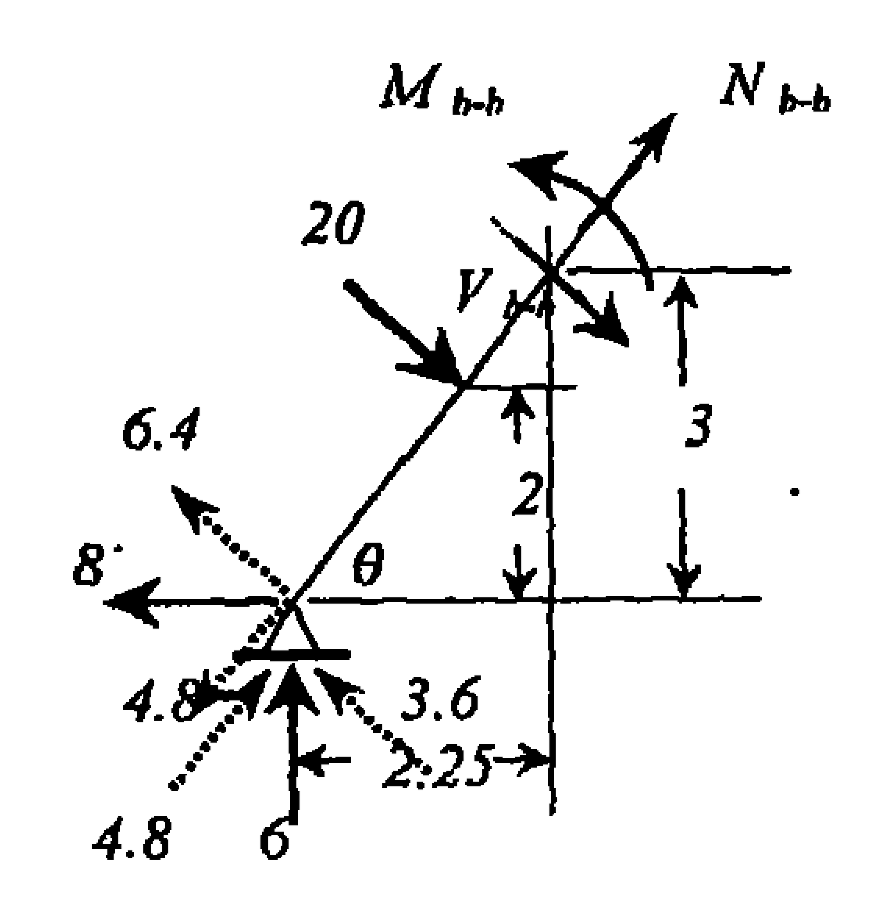
$$\Sigma M\ @\ \text{المقطع}\ (a\text{-}a) = 0 \quad \Rightarrow M_{a-a} + \qquad\qquad + 18(4) - 24(3) = 0$$

$$\therefore \quad M_{a-a} = 22.4\ kN.m$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - 18 - H_{a-a} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{a-a} = 8\ kN$$ (وهي ضغط)

عند المقطع (b-b) واعتبار الجزء الأيمن من المنشأ ينتج من تطبيق معادلات الاتزان أن:

على امتداد العضو لدينا:



$$N_{b-b} + 6Sin\ \theta - 8Cos\ \theta = 0$$

$$\therefore \quad N_{b-b} = 0$$

عموديا على اتجاه العضو لدينا:

$$6.4 + 3.6 - 20 - V_{b-b} = 0$$

$$\therefore \quad V_{b-b} = -10\ kN \quad (i.e.\ \nwarrow)$$

$$\Sigma M\ @\ sec.\ (b\text{-}b) = 0 \quad \Rightarrow (6.4+3.6)(3.75) - 20(1.25) - M_{a-a} = 0$$

مثال:
أوجد القوى الداخلية عند المقطع (a-a) للقوس الموضح. ردود الأفعال عند نقاط التثبيت كما هي مبينة.

الحل:
ملاحظة مهمة:
في حالة أن العضو منحني فقوة القص تكون عمودية على المماس عند المقطع المطلوب وتكون القوة المحورية في اتجاه المماس. وعليه:
ميل المماس عند $x = 30\ m$ يساوي:

$= Tan\ \theta \qquad \& \qquad b = \qquad m$

عند المقطع (a-a) واعتبار الجزء الأيمن من القوس يظهر أن:

$M_{a-a} = 60(5) - 40(5) = 100\ kN.m$

$N_{a-a} = 40\ Sin\ \theta + 60\ Cos\ \theta$

$= 40$

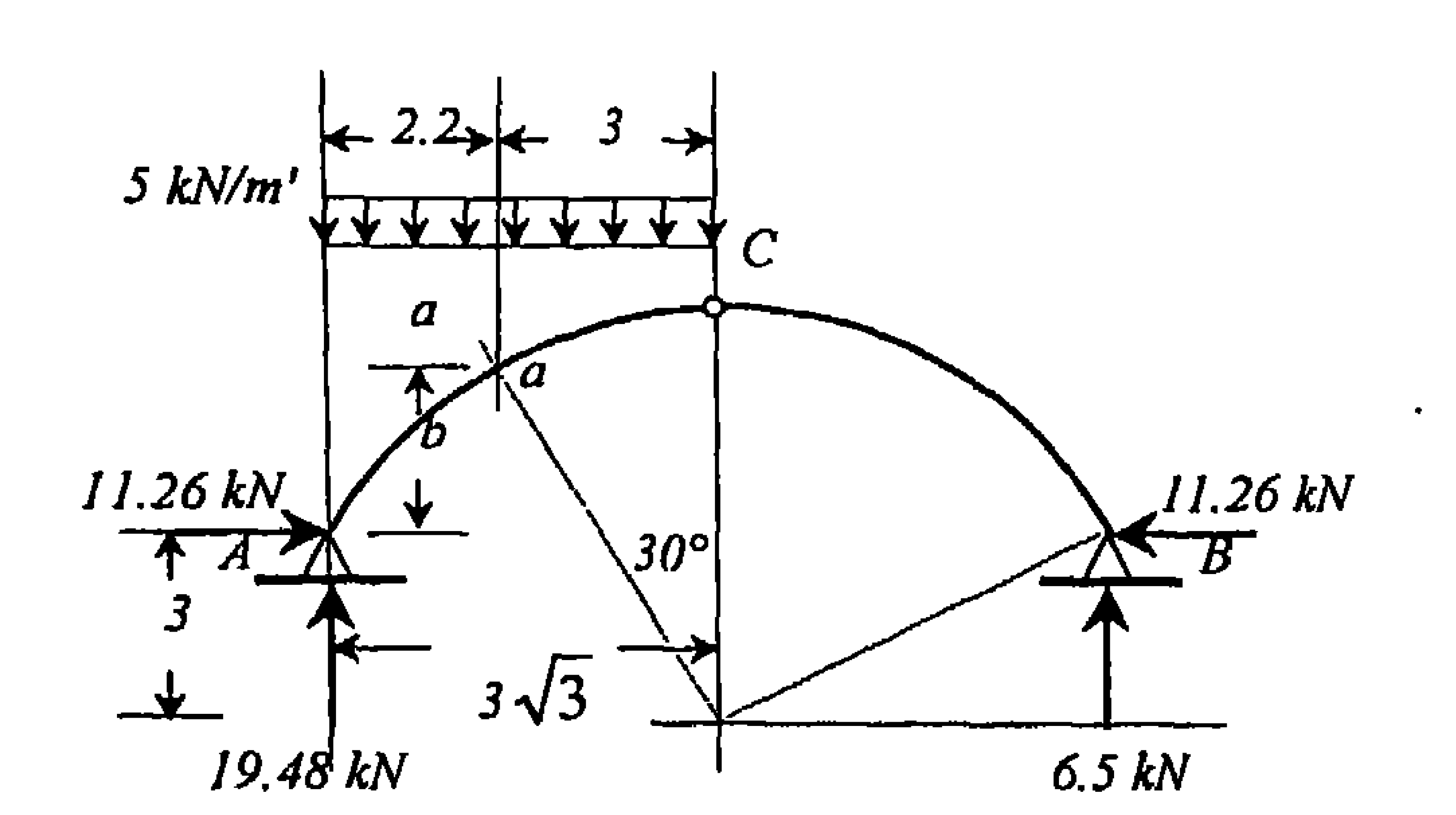
$= 71.7\ kN\ \ (C)$ وهي ضغط

$V_{a-a} = 60\ Sin\ \theta - 40\ Cos\ \theta \quad = 60 \qquad = 7.68\ kN$

تمرين:
للمنشأ الموضح، أوجد ردود الفعل والقوى الداخلية في المقطع (1-1).

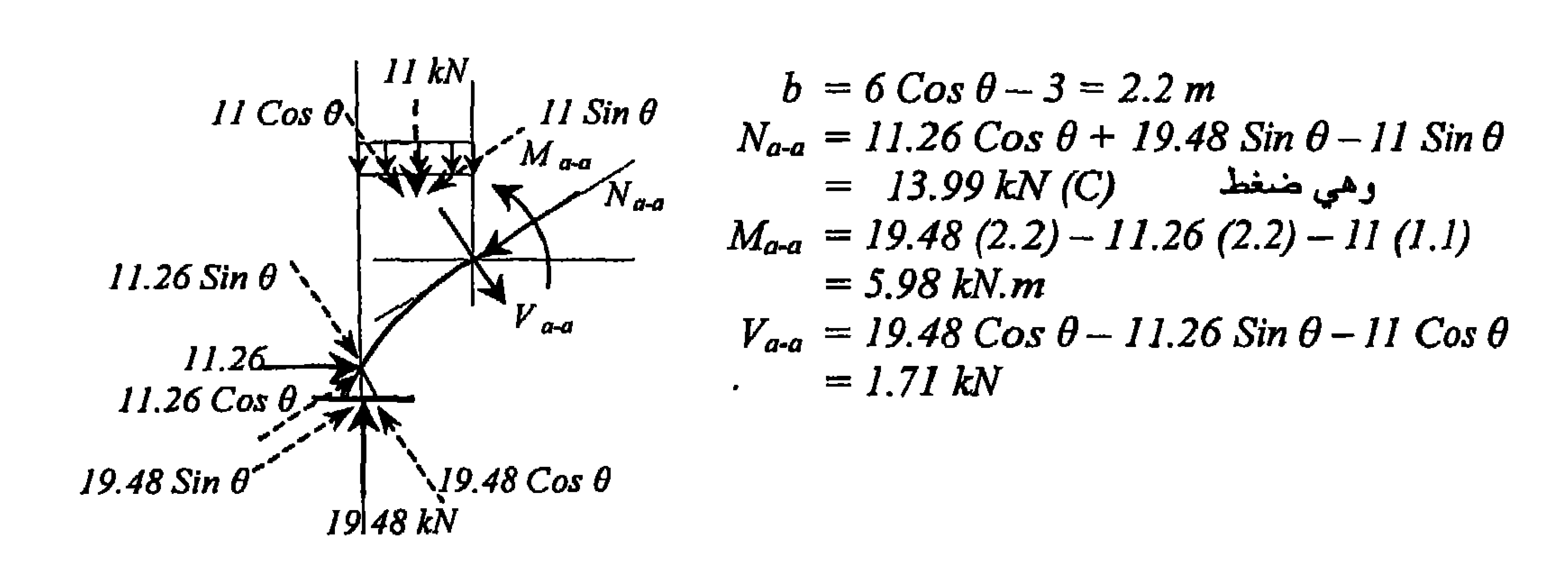
مثال:

الشكل المرفق يمثل قوسا دائريا نصف قطره يساوي 6 أمتار ومبينا عليه رد الفعل عند نقاط التثبيت.
أوجد القوى الداخلية عند المقطع (a-a) .



الحل:

لاحظ أن المماس ونصف القطر في الدائرة يكونان متعامدان.
من المقطع (a-a) والجزء الأيسر ودراسة حالة اتزان هذا الجزء نجد أن:
زاوية ميل المماس عند المقطع (a-a) تسوي θ تساوي 30°.



$$b = 6 \cos\theta - 3 = 2.2\ m$$

$$N_{a\text{-}a} = 11.26 \cos\theta + 19.48 \sin\theta - 11 \sin\theta$$

$$= 13.99\ kN\ (C)$$ وهي ضغط

$$M_{a\text{-}a} = 19.48\,(2.2) - 11.26\,(2.2) - 11\,(1.1)$$

$$= 5.98\ kN.m$$

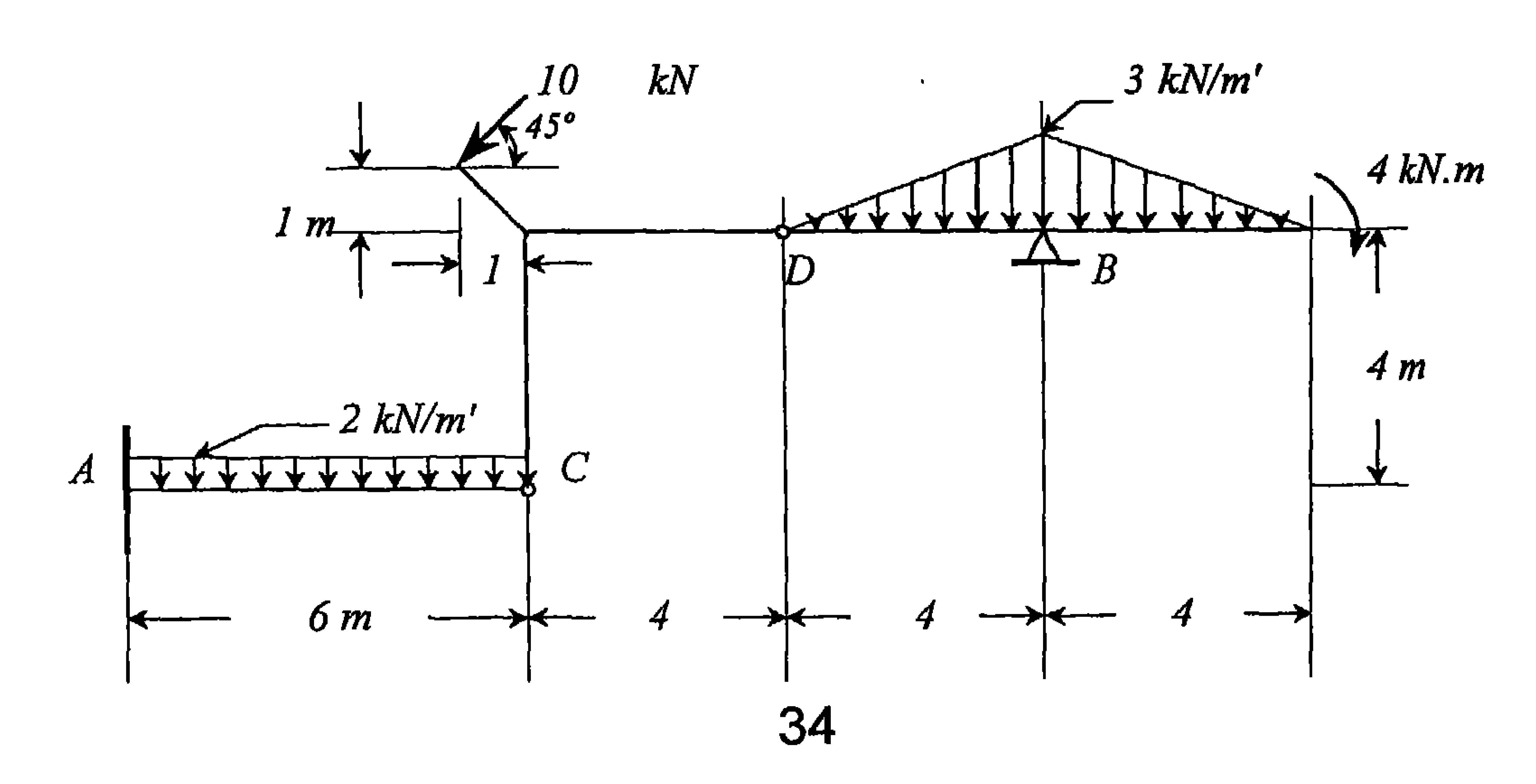
$$V_{a\text{-}a} = 19.48 \cos\theta - 11.26 \sin\theta - 11 \cos\theta$$

$$= 1.71\ kN$$

~~~~~~~~~~~~~~~~

تمرين:

للمنشأ الموضح، احسب ردود الأفعال عند نقاط التثبيت. ثم أوجد القوى الداخلية عند المفاصل *C & D*..


~~~~~~~~~~~~~~~~

4

الباب الرابع

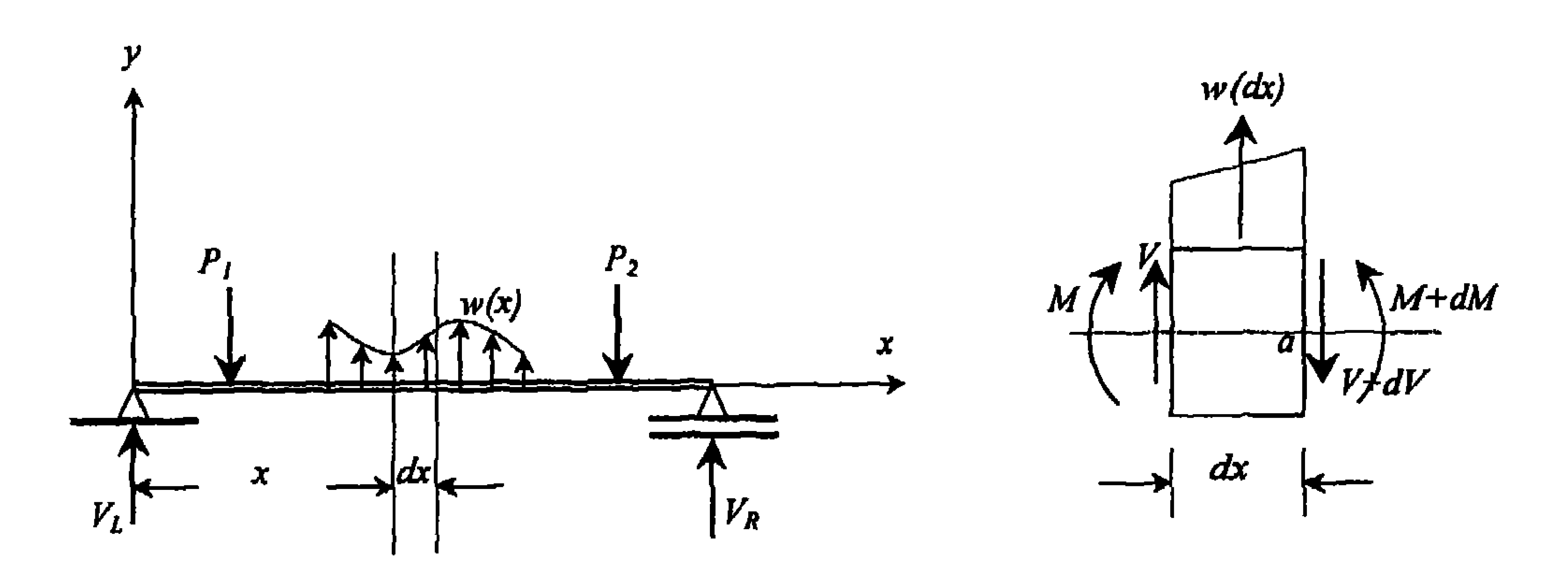
منحنيات القوى الداخلية

4- منحنيات القوى الداخلية

تعطى المنحنيات للقوى الداخلية صورة توضيحية لتغير هذه القوى محورية كانت، أم قوة قص أم قوة عزم انحناء على امتداد عضو المنشأ. وهذه الصورة المرئية بدورها توضح الأماكن التي تكون فيها القوى الداخلية عند أقصى قيمها. وبالتالي لهذه المنحنيات أهمية بالغة عند تصميم مقاطع الأجزاء والعناصر المختلفة لأي منشأ. ورسم هذه المنحنيات من الأساسيات التي يجب على المهندس الإنشائي أن يتقنها.

1-4 العلاقة بين الأحمال، وقوة القص، وعزم الانحناء

هناك علاقة رياضية تربط بين الأحمال وقوى القص وعزم الانحناء نوضحها بالعارضة البسيطة كما يلي:



$$\Sigma M @ a = 0 \Rightarrow \quad M + V(dx) + w(dx)(dx/2) - (M+dM) = V(dx) - dM$$

حيث يمكن إهمال الحد $w(dx)^2/2$ لضآلة قيمته وصغرها.

$$\therefore \quad dM = Vdx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad i$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow \quad V + w(dx) - (V + dV) = w(dx) - dV$$

$$\therefore \quad dV = wdx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ii$$

1-1-4 ميل المماس لمنحنيات القص والعزوم

حيث أن الكمرة على امتداد المحور x عليه يمكن اعتبار منحنيات القص والعزوم أنها دالة لقوى القص والعزم للمتغير x على الترتيب. وعليه يمكن كتابة المعادلات السابقة كما يلي:

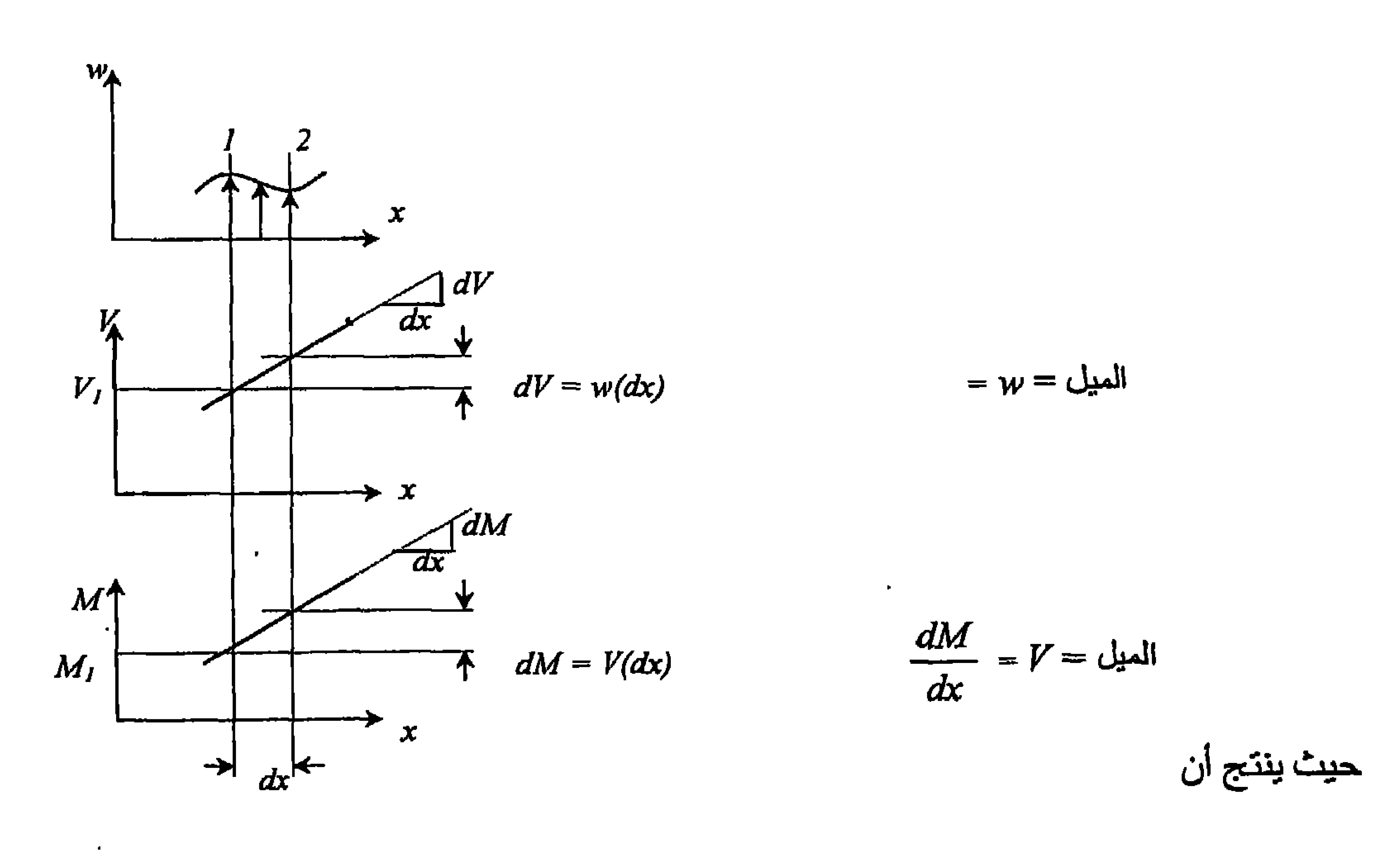
$$dV/dx = w$$

$$dM/dx = V$$

dV/dx يعبر عن ميل المماس لمنحنى القص، وهو مساويا لكثافة الحمل الموزع عند أي نقطة x ، أما dM/dx فيعبر عن ميل المماس لمنحنى العزوم، وهو مساويا لكثافة القص عند النقطة أو المقطع x .

2-1-4 منحنيات القص والعزوم بتكامل المساحات

غالبا ما يتم رسم منحنيات القص والعزوم بالتكامل البسيط للمساحات. ويمكن توضيح المعادلتين i & ii كما يلي:



الميل = w =

الميل = V = $\frac{dM}{dx}$

حيث ينتج أن

مساحة منحنى الحمل الموزع بين النقطتين 1 & 2 = $(V_2 - V_1)$ =

و

مساحة منحنى القص بين النقطتين 1 & 2 = $(M_2 - M_1)$ =

في الحالات التي يكون فيها التكامل ليسا سهلا ومباشرا، يرسم منحنيي القص والعزوم بالعودة إلى قوانين الاتزان.

ملاحظات مهمة:

1- عند نهايات الكمرات:

* - يكون عزم الانحناء مساويا للصفر إلا إذا كانت محمّلة بعزم خارجي أو ازدواج.
* - تكون قوة القص مساوية للصفر إلا إذا كانت محمّلة بحمل مركز عند هذا الطرف.

2- نقاط التثبيت للكمرات البسيطة في أطرافها يكون العزم مساويا للصّفر إلا إذا كانت محمّلة بعزم خارجي.

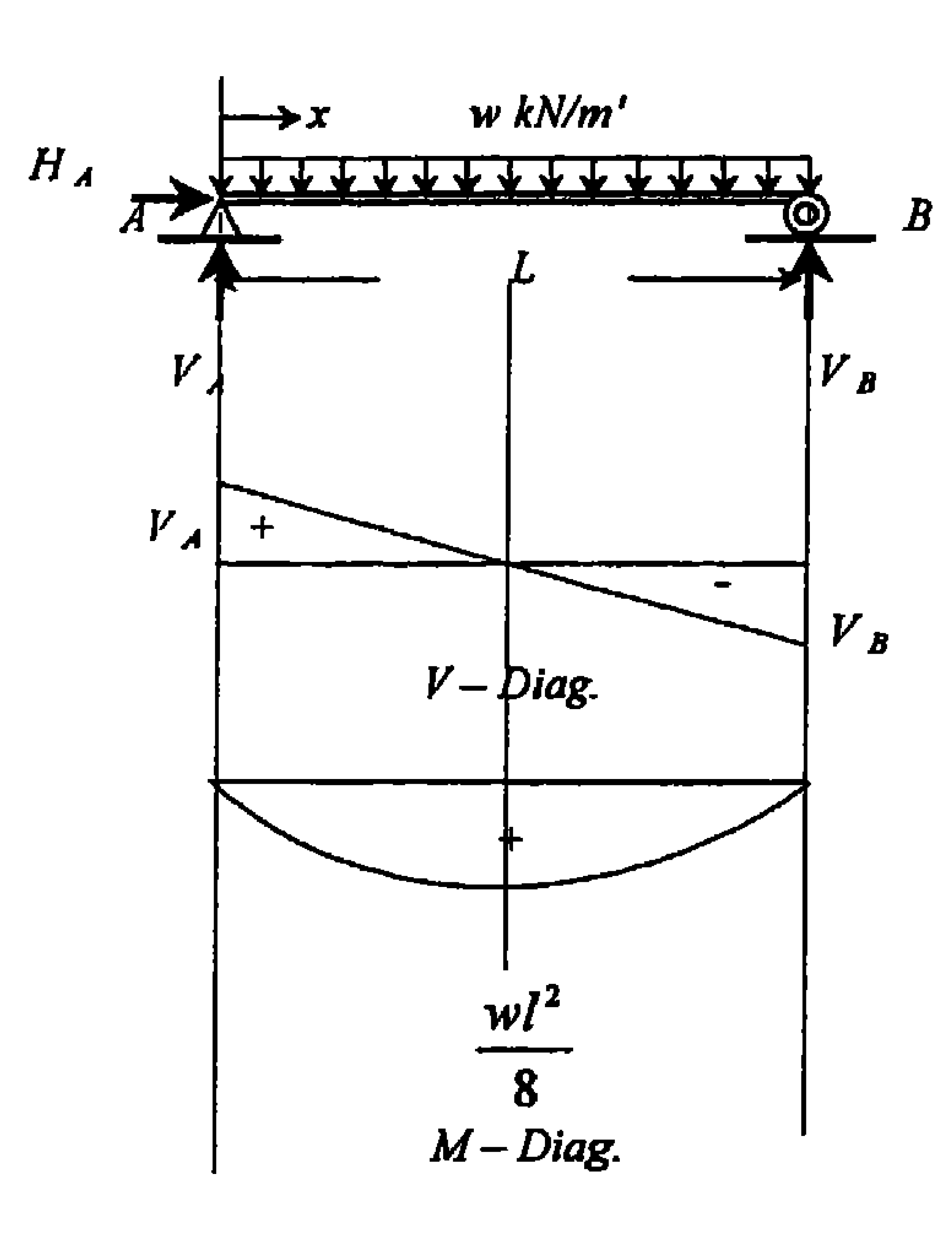
3- في المفاصل الداخليّة للكمرات (<u>ليس نقاط التثبيت</u>)، يكون العزم مساويا للصفر.

4- عادة ما يكون للقص والعزم مقدار في الأطراف المثبتة للكمرات.

5- عادة ما يكون للقص والعزم مقدار في الكمرات عند نقاط التثبيت الداخلية للكمرات المستمرة.

6- ارسم <u>دائما</u> منحنى العزم على السطح المعرض للشد في الكمرات وأعضاء المنشأ الأخرى. سيكون هذا من المفيد جدّا عند التعامل مع الأطر وفي مواضيع أخرى.

مثال:
للكمرة البسيطة الموضحة،
ارسم منحنيات القص
وعزم الانحناء.



الحل:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$

$\Sigma M @ A = 0 \Rightarrow wl(l/2) - V_B l = 0$

$\therefore V_B = wl/2 \uparrow$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow V_A = wl/2 \uparrow$

عند أي مقطع من اليسار إلى اليمين:

$V_x = wl/2 - wx = w(l/2 - x)$

وهي معادلة خط مستقيم.

القص عند $x = l/2$ ينعدم أي أن $V = 0$

$M_x =$

وهي معادلة قطع مخروطي.

ويكون للعزم قيمة قصوى عندما يكون القص مساويا للصفر. نحقق هذا من خواص ميل المماس للدالة.
وهذه القيمة القصوى للعزم تكون عند $x = l/2$.

الميل $= \dfrac{dM}{dx} = V \quad \Rightarrow$

$M_{max} =$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بتفاضل معادلة العزوم بالنسبة للمتغير x .

~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال: ارسم منحنيي القص والعزوم للكمرة الموضحة.

10 kN
10 kN
A
B
2 m
3 m
2 m
V_A
V_B
10
+
-
10
V – Diag.
+
20
20
M – Diag.

الحل:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$

$\Sigma M @ A = 0$

$= 10(2) + 10(5) - 7V_B$

$\therefore V_B = 10 \, kN \uparrow$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow$

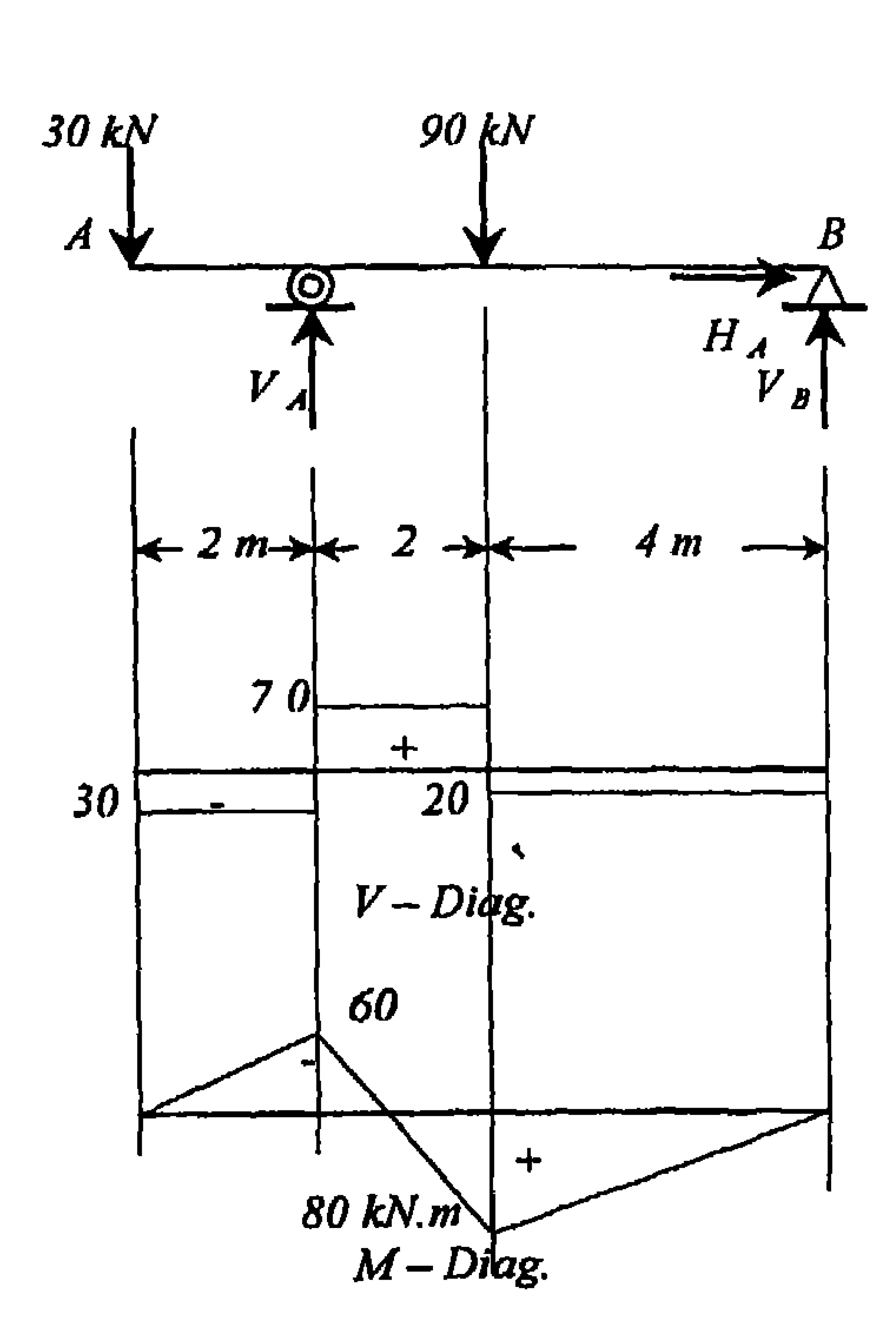
$V_A - 10 - 10 + 10 = 0$

$\therefore V_A = 10 \, kN \uparrow$

لرسم المنحنيات، ابدأ من اليسار إلى اليمين.
خذ اتجاه القوى وردود الأفعال وبنفس اتجاهها لرسم منحنى القص. إقفال هذا المنحنى يؤكد صحة حساب ردود الأفعال. أرسم منحنى العزوم، من منحنى القص إذا كان ممكنا بسهولة، على سطح الشد.
~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

ارسم منحنيات القص والعزوم للعارضة الموضحة.



الحل:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0 = 90(2) - 30(2) - 6V_B$$

$$\therefore V_B = 20 \ kN \uparrow$$

$$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow$$

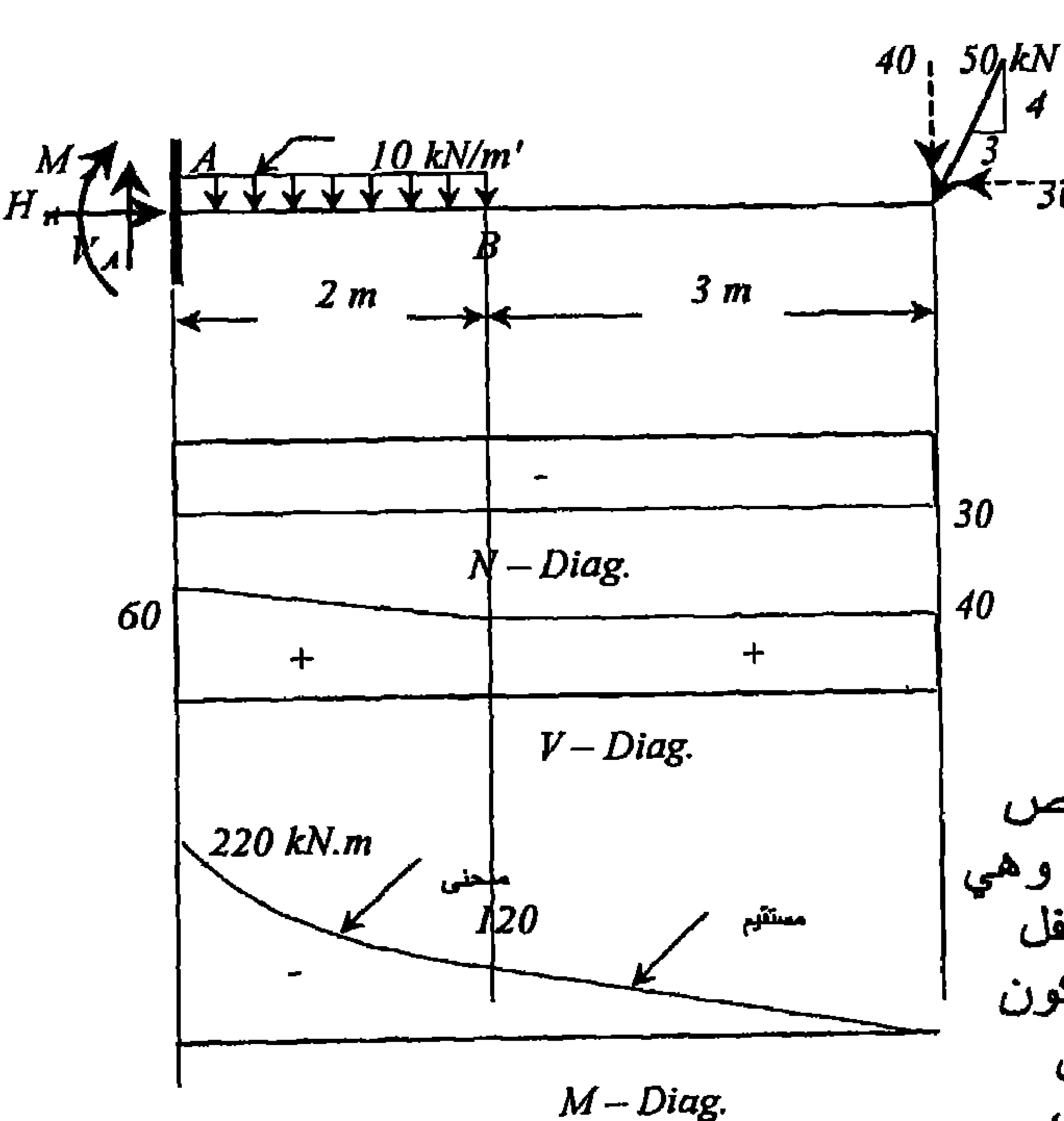
$$V_A - 30 - 90 + 20 = 0$$

$$\therefore V_A = 100 \ kN \uparrow$$

ابدأ من اليسار إلى اليمين، خذ القوى مقدارا واتجاها لرسم منحنى القص. قفل المنحنى يؤكد صحة الحسابات. من منحنى القص ارسم منحنى العزوم بإتباع الحقيقة أن التغير في مقدار العزم بين نقطة وأخرى يكافىء مساحة منحنى القص بين هاتين النقطتين. أو ارسم منحنى العزوم من المبادىء الأولية باستخدام معادلات الاتزان.

مثال:

للكابولي الموضح، ارسم منحنيات القص وعزوم الانحناء والقوى المحورية.



الحل:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 30 \ kN$$

$$\curvearrowleft \Sigma M @ A = 0$$

$$= M_A + 10(2)(1) + 40(5)$$

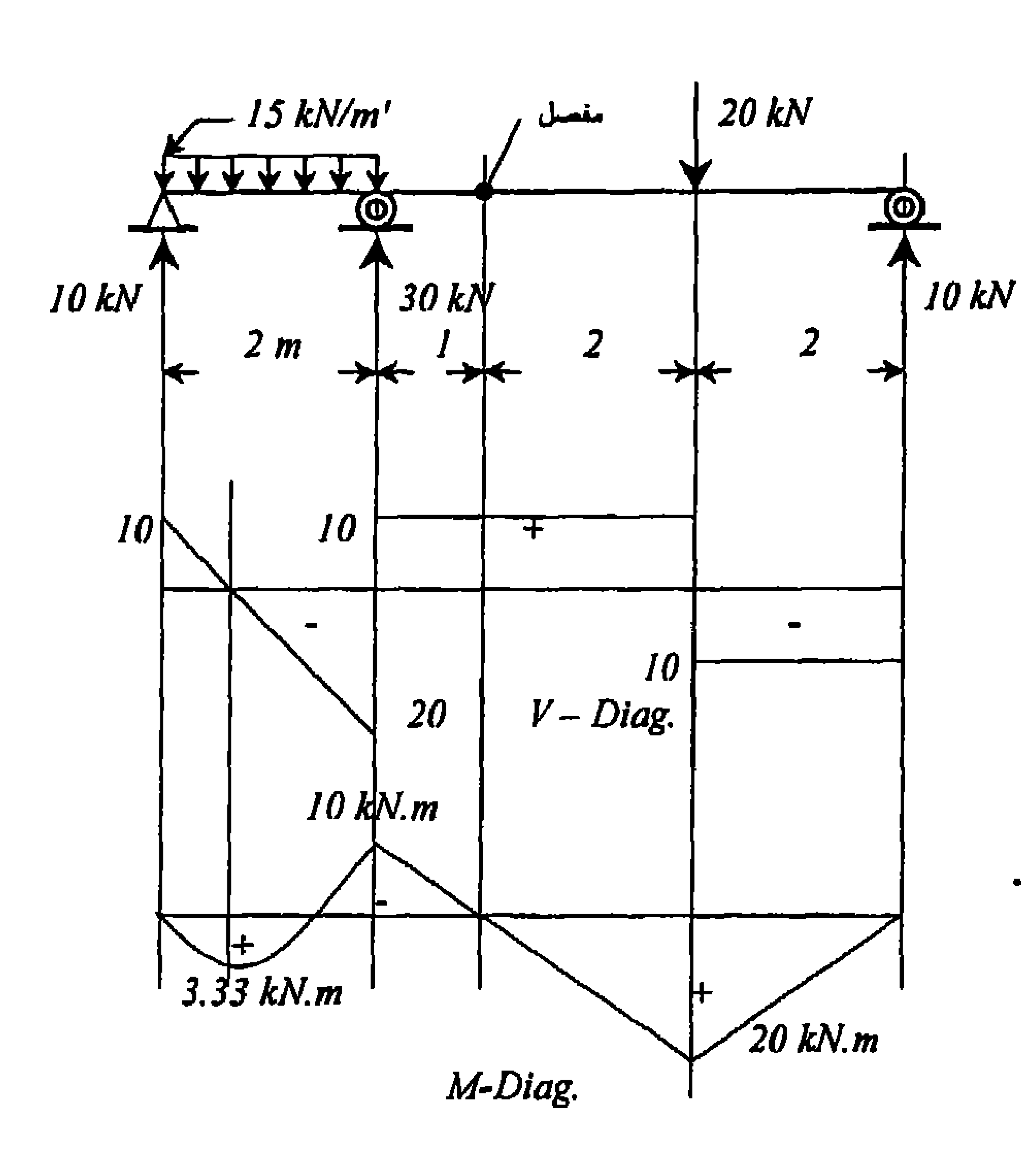
$$\therefore M_A = -220 = 220 \ kN.m \curvearrowleft$$

$$\Sigma F_Y = 0 = V_A - 10(2) - 40$$

$$\therefore V_A = 60 \ kN \uparrow$$

ابدأ من اليسار إلى اليمين لرسم منحنى القص كما سبق شرحه. منحنى القوى المحورية، وهي قوى ضغط في هذا المثال لذلك رسمت أسفل الخط المرجع. لاحظ أن منحنى العزوم يتكون من جزأين، الأول منهما منحنى وهو أعلى درجة من منحنى القص الذي كان مستقيما، أما الثاني فمستقيم وهو كذلك أعلى درجة من منحنى القص حيث كان ثابت المقدار. والعزم عند منتصف المسافة بين A & B يساوي : $60(1) - 220 - 10(1)/2 = 165 \ kN.m'$ وهذا المقدار أقل من متوسط قيمة القص عند كل من A & B مما يوضح أن المنحنى مقعر كما هو موضح.

مثال:
للكمرة الموضحة ارسم منحنيات القص والعزوم. ومن ثم تحقق من صحة ردود الفعل المعطاة.



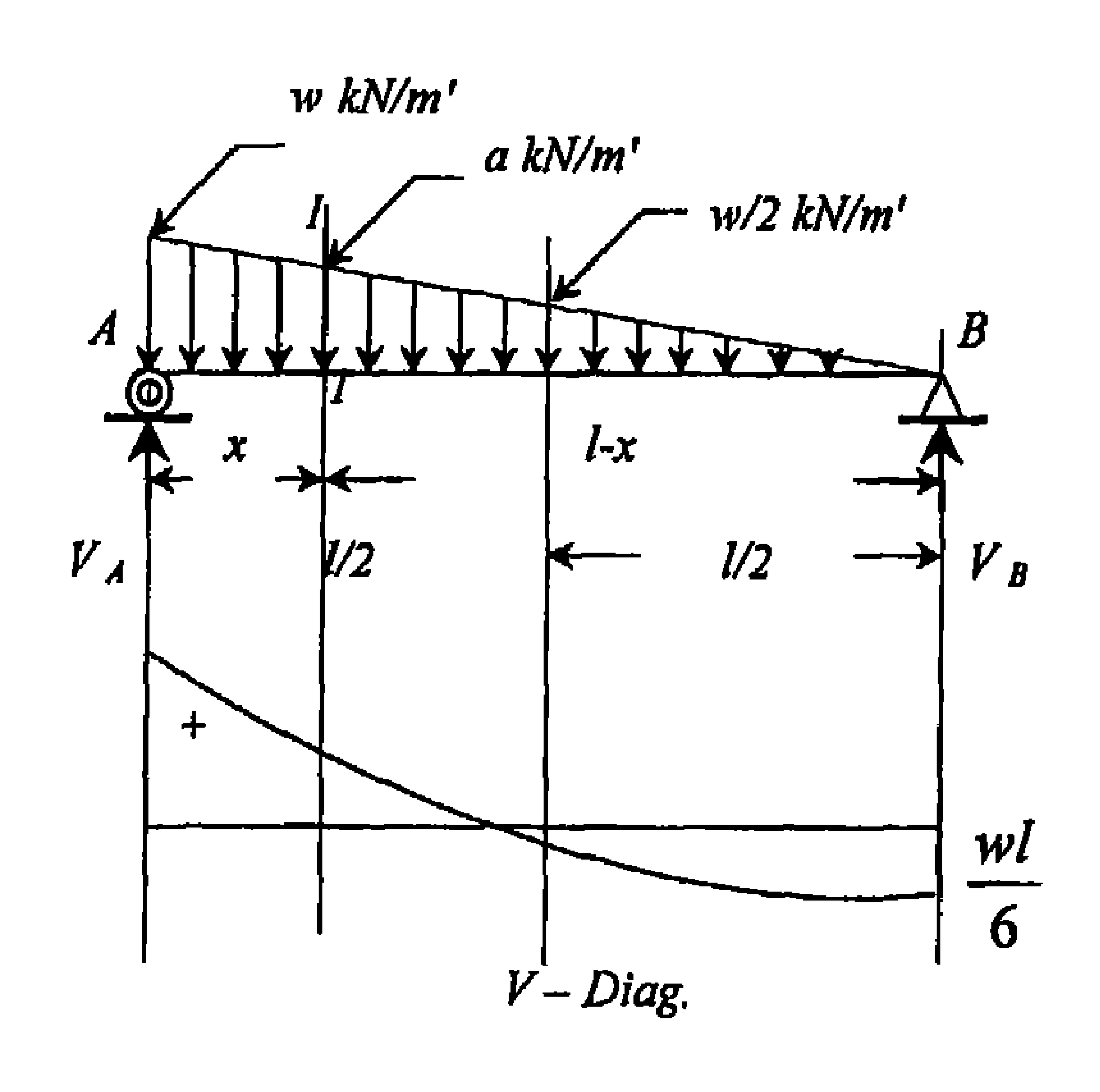
الحل:
كما وصف في أمثلة سابقة، رسمت المنحنيات المطلوبة. وحيث أن منحنى القص قفل فهذا يثبت أن حساب ردود الفعل صحيحة.

ملاحظات مهمة:
1- القص غير معرف عند نقاط التحميل. القص يكون معرف يسار أو يمين الأحمال المركزة.
2- العزم يأخذ قيمة قصوى حيث يكون القص مساويا للصفر.

3-1-4 الأحمال متغيرة الكثافة

تم إثبات العلاقة بين كثافة الأحمال الموزعة والقص حيث يكون منحنى القص من الدرجة الأولى (خط مستقيم) إذا كانت كثافة الأحمال w ثابتة. وعليه يكون منحنى القص أعلى درجة من منحنى الأحمال عندما تكون الكثافة للأحمال متغيرة. وتبعا لذلك يكون منحنى عزوم الانحناء أعلى درجة من منحنى القص.

مثال:
ارسم منحنى القص للعارضة الموضحة.



الحل:

$$V_A = \frac{wl}{3} \uparrow \text{ and } \quad V_B = \frac{wl}{6} \uparrow$$

$$\frac{a}{w} = \frac{l-x}{l} \Rightarrow a = \frac{w}{l}(l-x)$$

من المقطع (1-1) نحصل على:

$$V = \frac{wl}{3} - ½ (w+a)x$$

$$= \frac{wl}{3} -$$

$$\therefore V = \frac{wl}{3} -$$

بالتعويض عن x بمقادير مختلفة تم رسم منحنى القص الموضح. القص عند نقطة التثبيت يسار العارضة يساوي رد الفعل الذي يساوي $\frac{wl}{3}$

@ $x = l/2$ ⇨

$$V = \frac{wl}{3} -$$

$$= \frac{wl}{3} - \quad wl \quad = -\frac{wl}{24}$$

أو من ناحية اليمين فالقص يساوي

$$V = 1/2(w/2)(l/2) - \frac{wl}{6}$$

$$= -\frac{wl}{24} \quad check$$

عند الركيزة يمين العارضة فان القص يساوي $\frac{wl}{6}$ وهو مساويا لرد الفعل.

~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

ارسم منحنى القص للعارضة الموضحة.

w kN/m'
w/2 kN/m'
a kN/m'
1
A
B
1
x
l-x
l/2
V_A
V_B
$\frac{wl}{6}$
$\frac{wl}{24}$
-
V – Diag.
$\frac{wl}{3}$

الحل:

$$V_A = \frac{wl}{6}\uparrow \text{ and } \quad V_B = \quad \uparrow$$

$$\frac{a}{w} = \frac{l-x}{l} \Rightarrow a = \frac{w}{l}(l-x)$$

عند المقطع (1-1) نحصل على:

$$V = \frac{wl}{6} - ½\, ax$$

$$= \frac{wl}{6} -$$

$$= \quad -$$

بالتعويض عن x بمقادير مختلفة تم رسم منحنى القص الموضح. القص عند نقطة التثبيت يسار العارضة يساوي رد الفعل الذي يساوي $\frac{wl}{6}$.

@ $x = l/2$ ⇨

$$V = \frac{wl}{6} - \qquad = \quad - \quad wl \quad = +\frac{wl}{24}$$

عند الركيزة يمين العارضة فان القص يساوي وهو مساويا لرد الفعل.

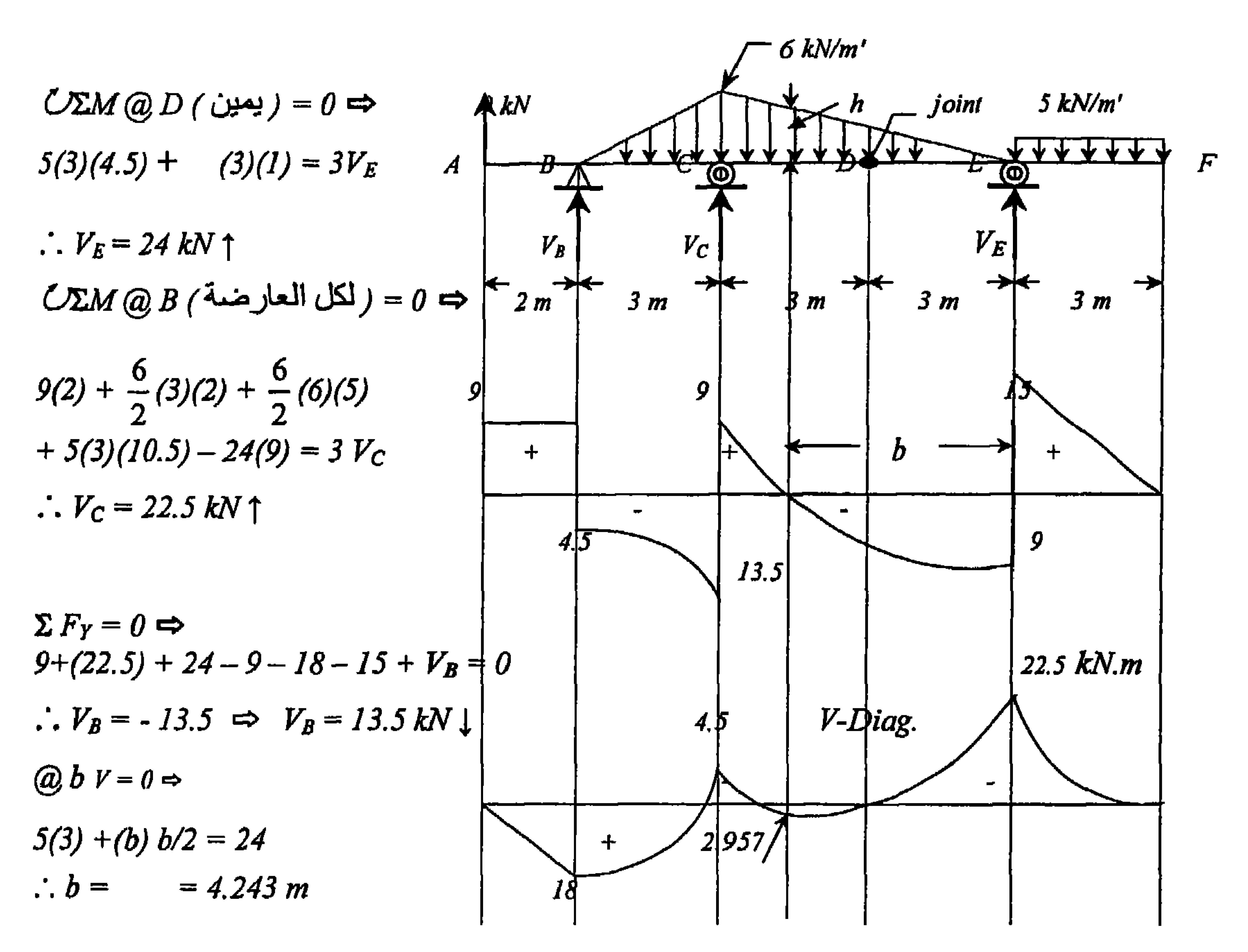
ملاحظة مهمة:

يستذكر اتجاه المنحنى للقص بأنه مقعر إذا كان الحمل تناقصيا، وبأنه محدب إذا كان الحمل تزايديًا.
~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

أحسب ردود الفعل عند الكراسي وارسم منحنيي القص والعزوم للعارضة الموضحة.

الحل:



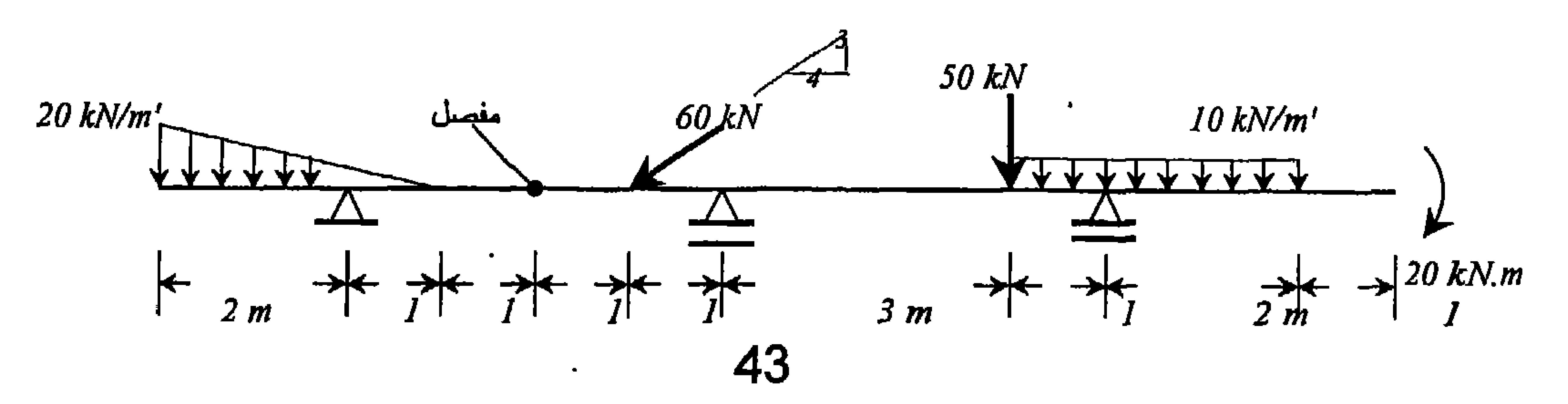
في هذا المكان:

$$M = -\ 5(3)(5.743) + 24(4.243) - \qquad = 2.956\ kN.m$$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

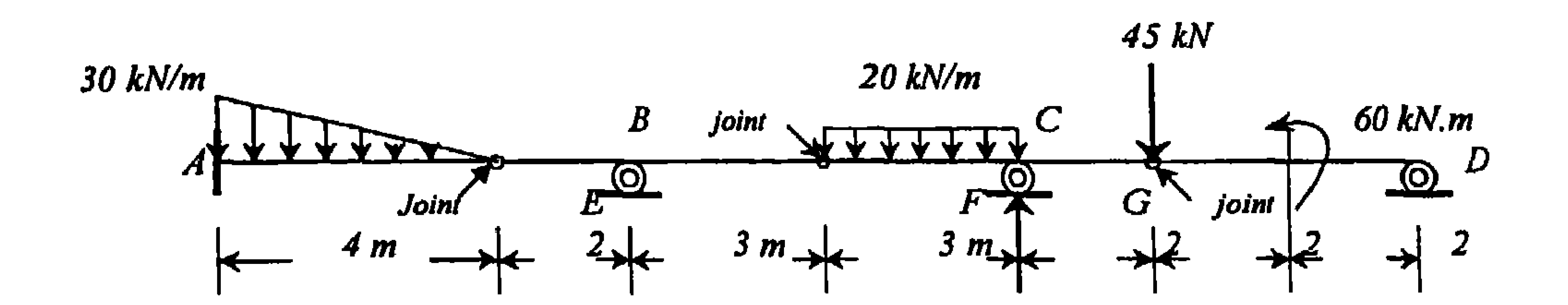
تمرين:

للعتبة المستمرة الموضحة، أوجد ردود الفعل وارسم منحنيات القوى الداخلية، القص والقوة المحورية وعزوم الانحناء. أرسم منحنى العزم على سطح الشد.


~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

ارسم منحنيات العزوم والقص للعارضة المستمرة الموضحة. رد الفعل الرأسي عند الكرسي C يساوي $130\ kN$ إلى أعلى.



الحل:

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$

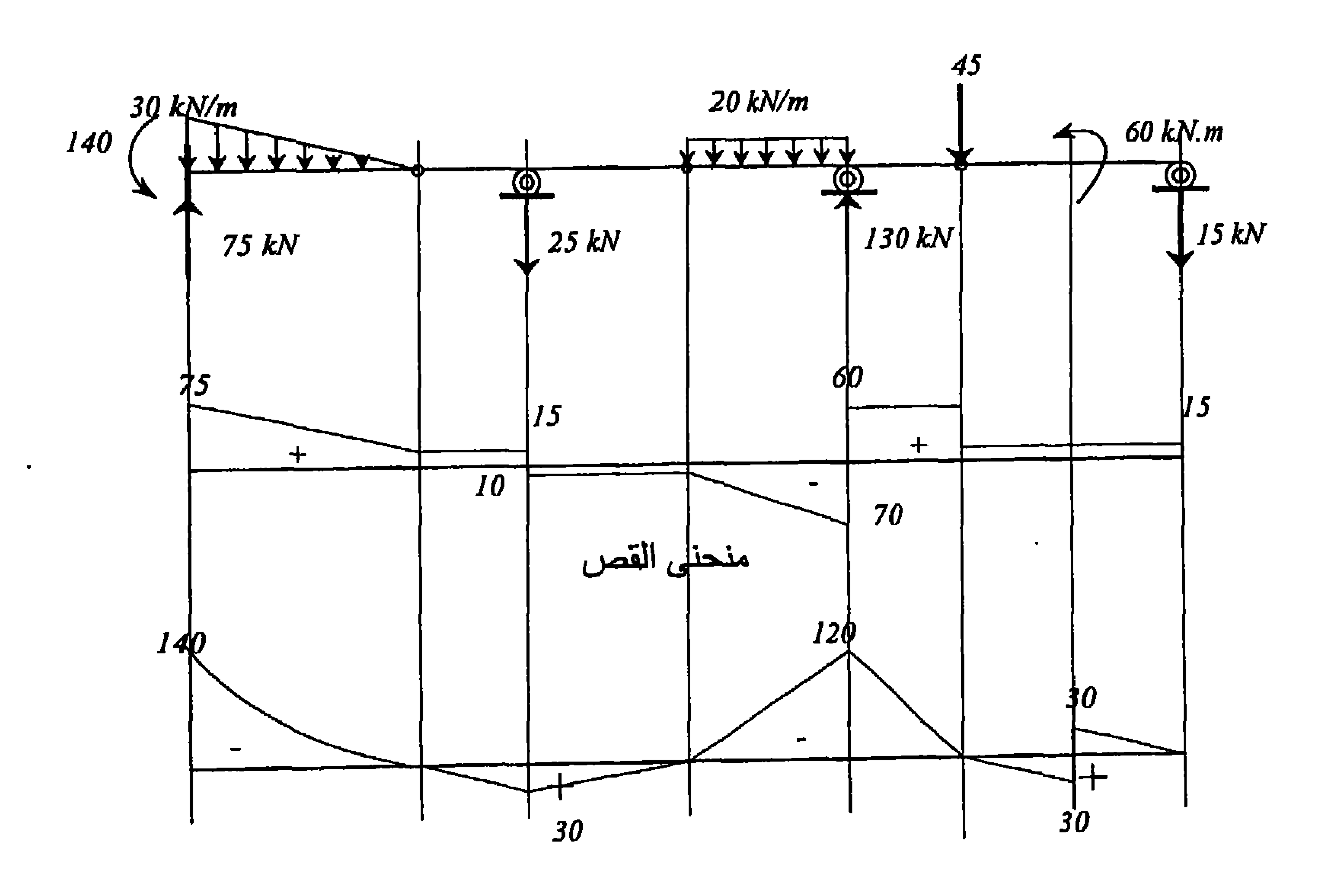
$\sum M @ G$ (يمين) $= 0 \Rightarrow -60 - 4D_Y = 0 \Rightarrow D_Y = 15\ kN \downarrow$

$\sum M @ F$ (يمين) $= 20(3)(3/2) - 130(3) + 45(5) - 60 + 9(15) = 0$ check

$\sum M @ E$ (يمين) $= 20(3)(6.5) - 130(8) + 45(10) - 60 + 14(15) - 2B_Y = 0 \Rightarrow B_Y = 25\ kN \downarrow$

$\sum F_Y = 0 \Rightarrow A_Y - ½\,(4)\,(30) - 25 - 20(3) + 130 - 45 - 15 = 0 \Rightarrow A_Y = 75\ kN \uparrow$

$\sum M @ E$ (يسار) $= 0 \Rightarrow M_A + 75(4) - ½\,(4)\,(30)(2/3)(4) = 0 \Rightarrow M_A = 140\ kN.m$ ↺



منحنى العزم مرسوم على سطح الشد

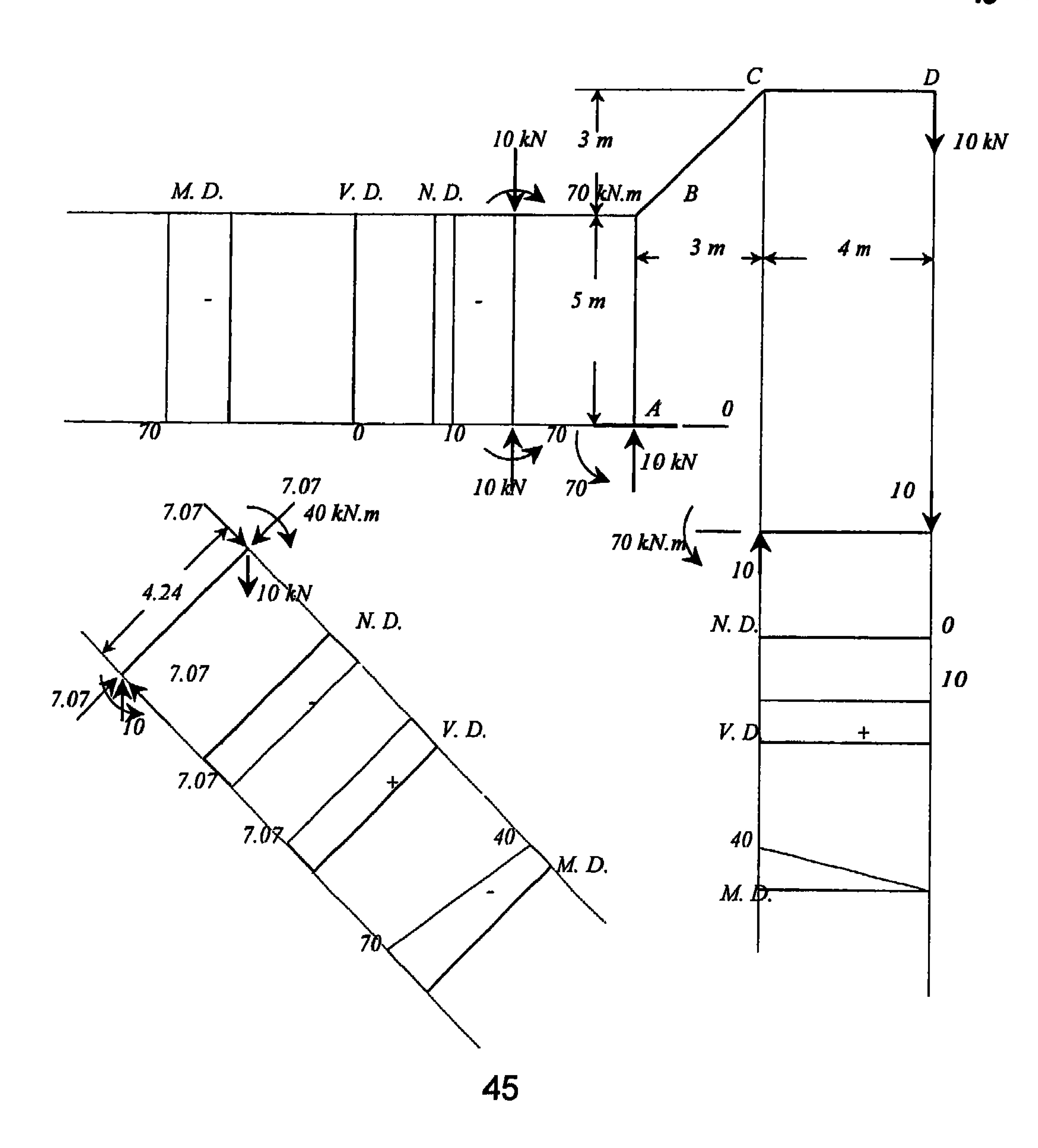
2-4-منحنيات القوى الداخلية للأطر

بعد تحديد قيم ردود الأفعال عند نقاط التثبيت للإطار باستخدام معادلات الاتزان، يكون من السهل التعامل مع أعضاء الإطار واحدا بعد الآخر لتحديد القوى الداخلية عند أطرافها. بعد تحديد هذه القوى ترسم منحنيات القوى الداخلية من محورية وقص وعزوم. **بعد ذلك تجمع هذه المنحنيات وترسم لكامل الإطار.**

مثال:

ارسم القوى المحورية للإطار الموضح. ردود الفعل عند نقاط التثبيت كما هي معطاة.

الحل:



خطوات الحل:

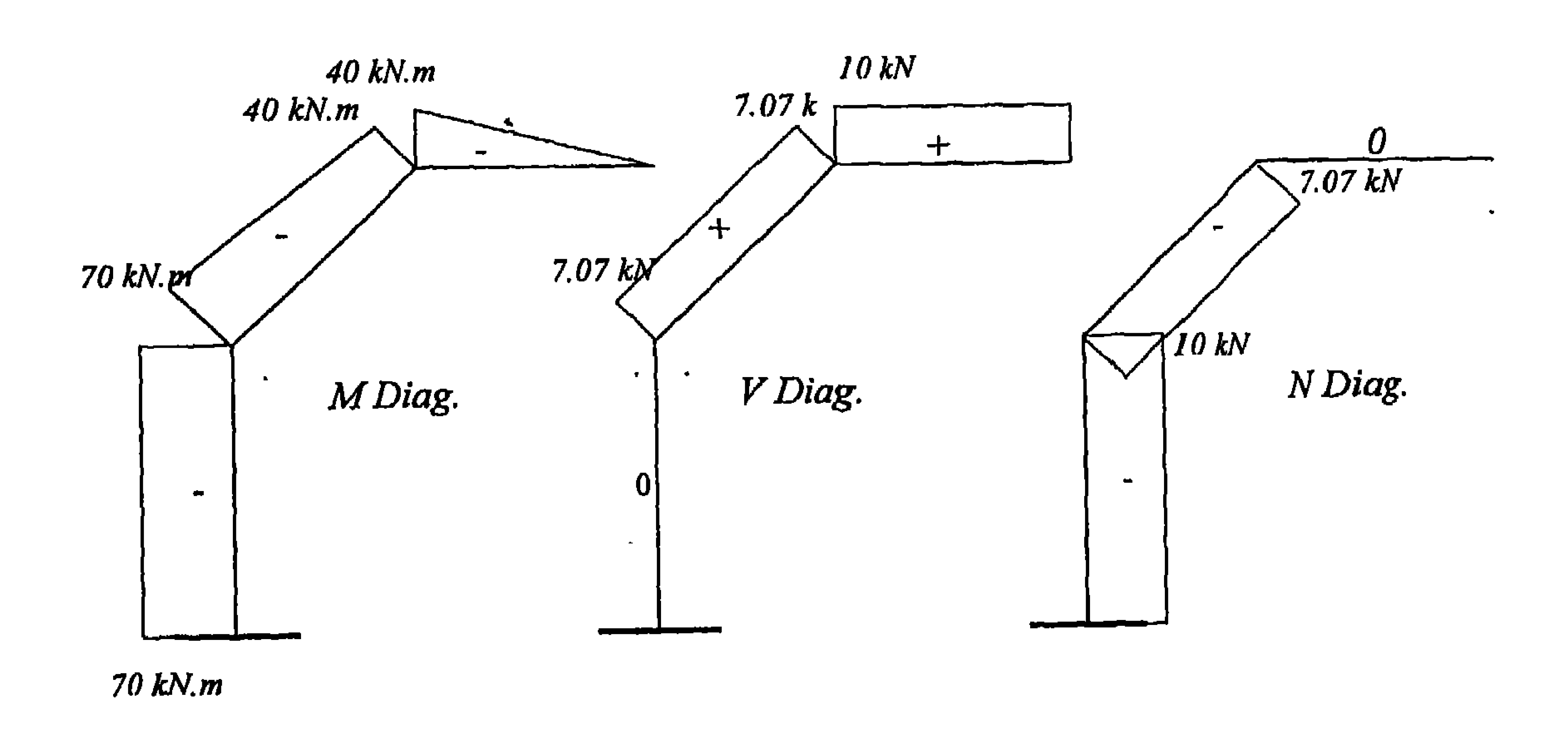
1- ابتداء بالعضو AB وباستخدام قوانين الاتزان حدد القوى الداخلية عند الطرف B.

2- على الطرف B من العضو BC اعكس اتجاه القوى التي تم الحصول عليها من الخطوة السابقة عند الطرف B. وباستخدام معادلات الاتزان حدد القوى عند الطرف C.

3- على الطرف C من العضو DC اعكس اتجاه القوى التي تم الحصول عليها من الخطوة السابقة عند الطرف C. وباستخدام معادلات الاتزان تحقق من أن العضو متزن.

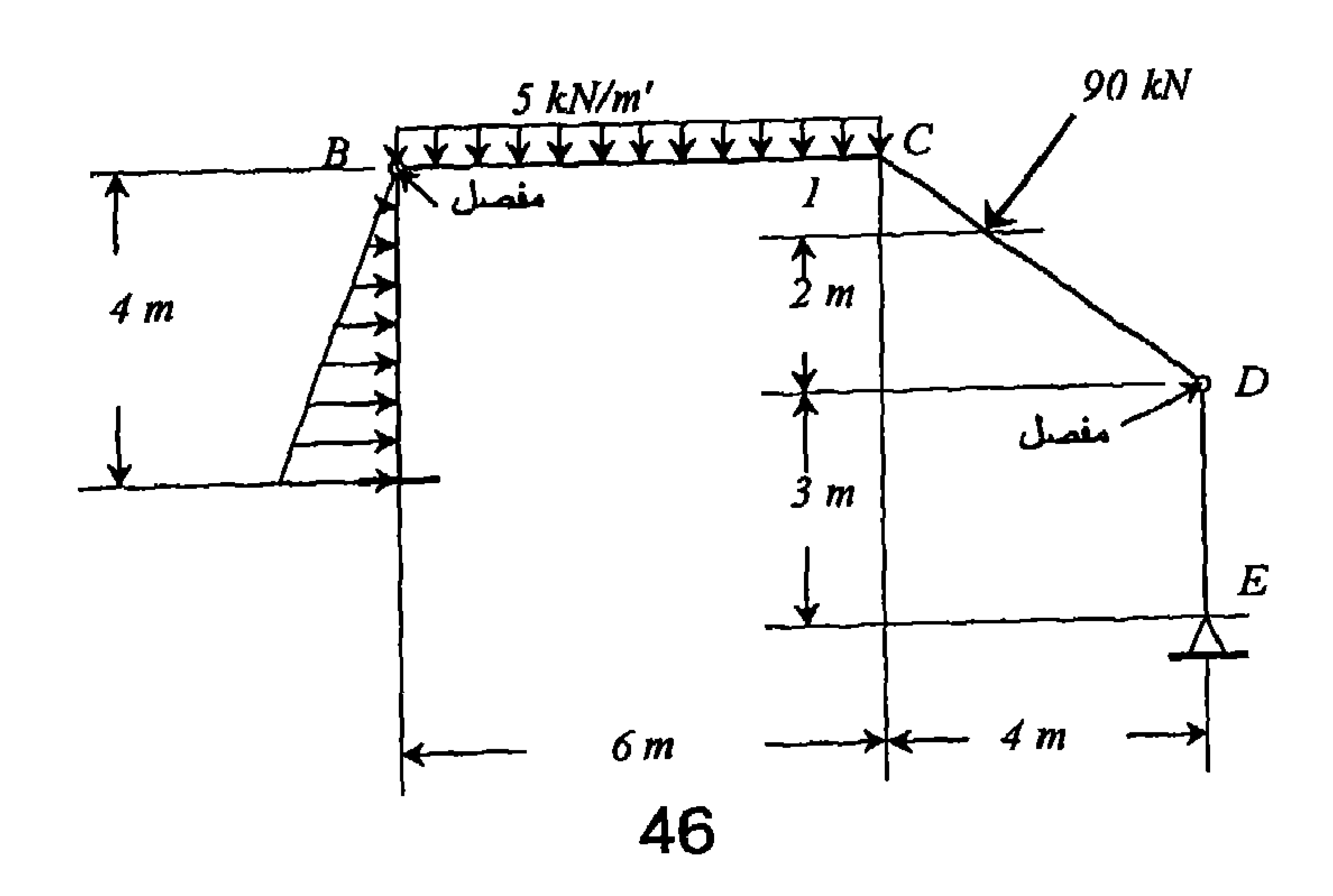
4- ارسم منحنيات القوى المحورية والقص وعزوم الانحناء لكل عضو ثم ارسمها مجمعة لكامل الإطار.

5- عند تجميع منحنى العزوم لكامل الإطار، سيظهر المنحنى عند المفاصل الداخلية للداخل أو للخارج موضحا أن العزم عند أطراف الأعضاء المتلاقية عند هذه المفاصل من ذات النوع، مقدارا وإشارة.



تمرين:

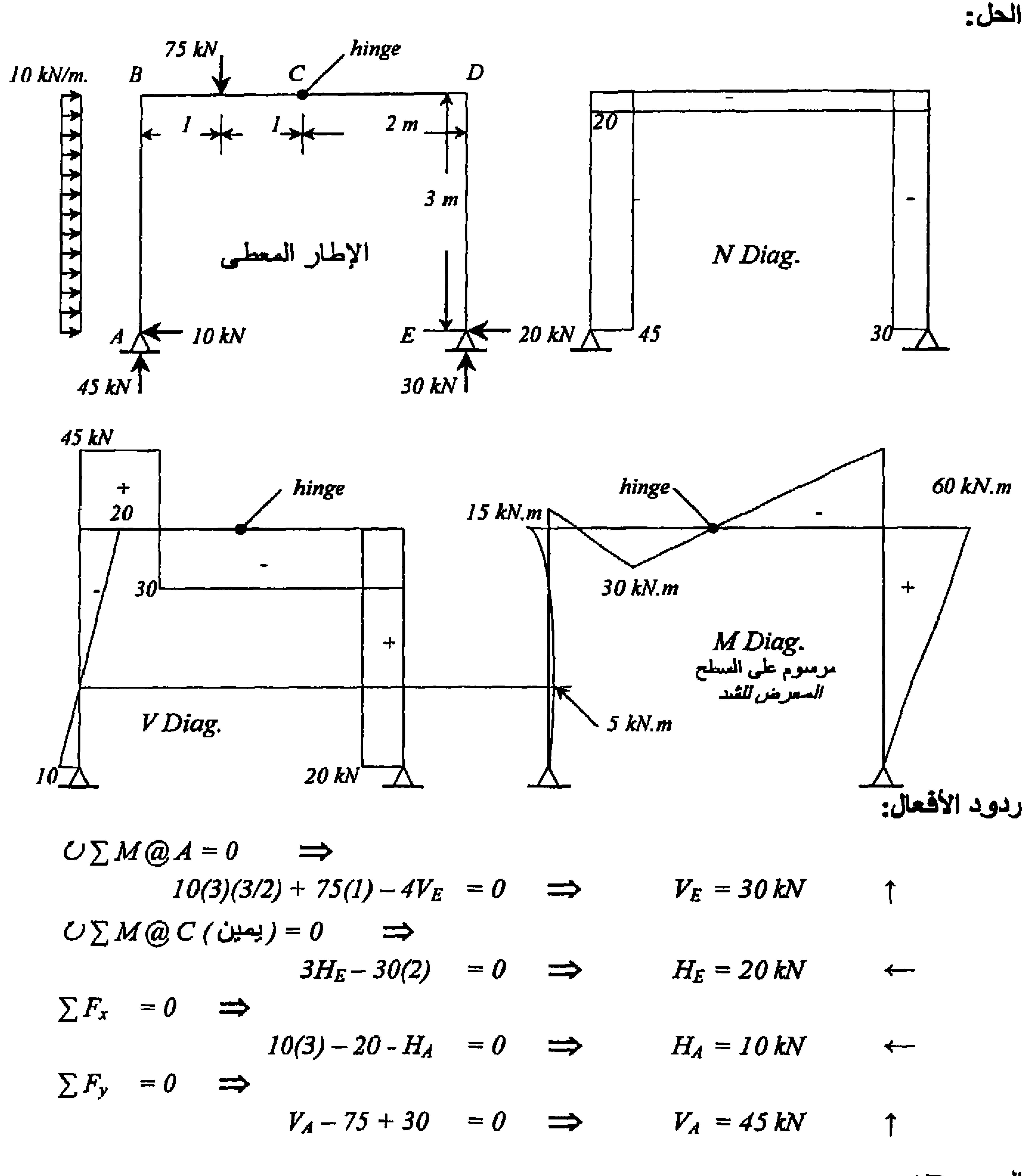
للإطار الموضح، ارسم منحنيات القوى المحورية والقص وعزوم الانحناء. ارسم منحنى العزوم على سطح الشد.



مثال:

للإطار الموضح، ارسم منحنيات القوة المحورية وقوة القص وعزم الانحناء بعد حساب ردود أفعال نقاط التثبيت.

الحل:



ردود الأفعال:

$\circlearrowleft \sum M@A = 0 \quad \Rightarrow$

$$10(3)(3/2) + 75(1) - 4V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E = 30\,kN \quad \uparrow$$

$\circlearrowleft \sum M@C\,(\text{يمين}) = 0 \quad \Rightarrow$

$$3H_E - 30(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad H_E = 20\,kN \quad \leftarrow$$

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

$$10(3) - 20 - H_A = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 10\,kN \quad \leftarrow$$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow$

$$V_A - 75 + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 45\,kN \quad \uparrow$$

العضو AB:

$N = 45\,kN \quad (C)$

$V_A = 10\,kN \quad \& \quad V_B = 10 - 10(3) = -20\,kN$

$\circlearrowleft M@$ عند القص مساويا صفر $10(1) - 10(1)(1/2) = 5\,kN.m \quad \circlearrowleft$

$\circlearrowleft M@B = 10(3) - 10(3)(3/2) = -15\,kN.m$

or $\quad M_{BA} = 15\,kN.m \quad \circlearrowleft \quad = M_{BC}$

العضو DE:

$N = 30\ kN$ (C)
$V_E = 20\ kN = V_D$
$M_D = 20(3) = 60\ kN.m = M_{DE} = M_{DB}$

العضو BD:

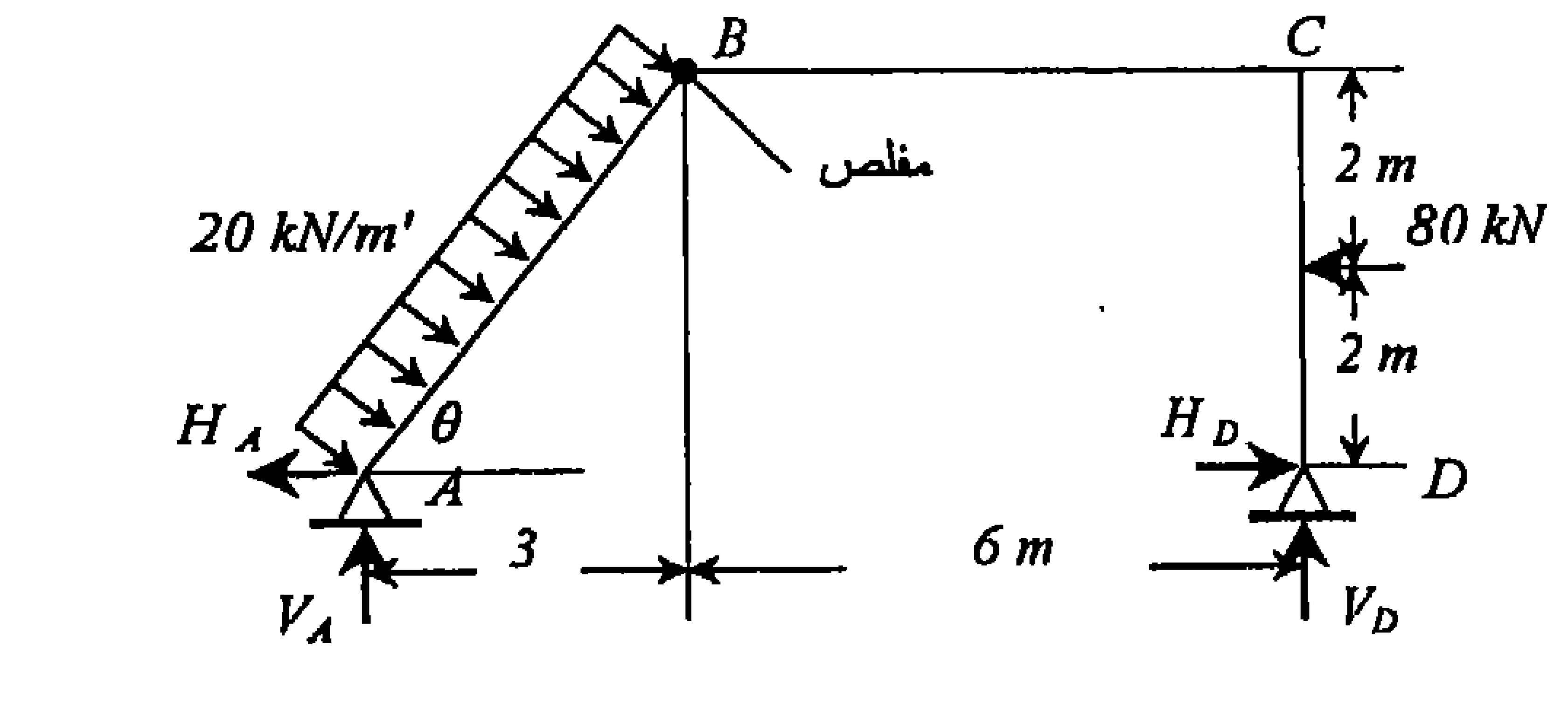
M @ عند الحمل (من اليسار) $= 45(1) + 10(3) - 10(3)(3/2) = 30\ kN.m$ ↺
M @ عند الحمل (من اليمين) $= 30(3) - 20(3) = 30\ kN.m$ check

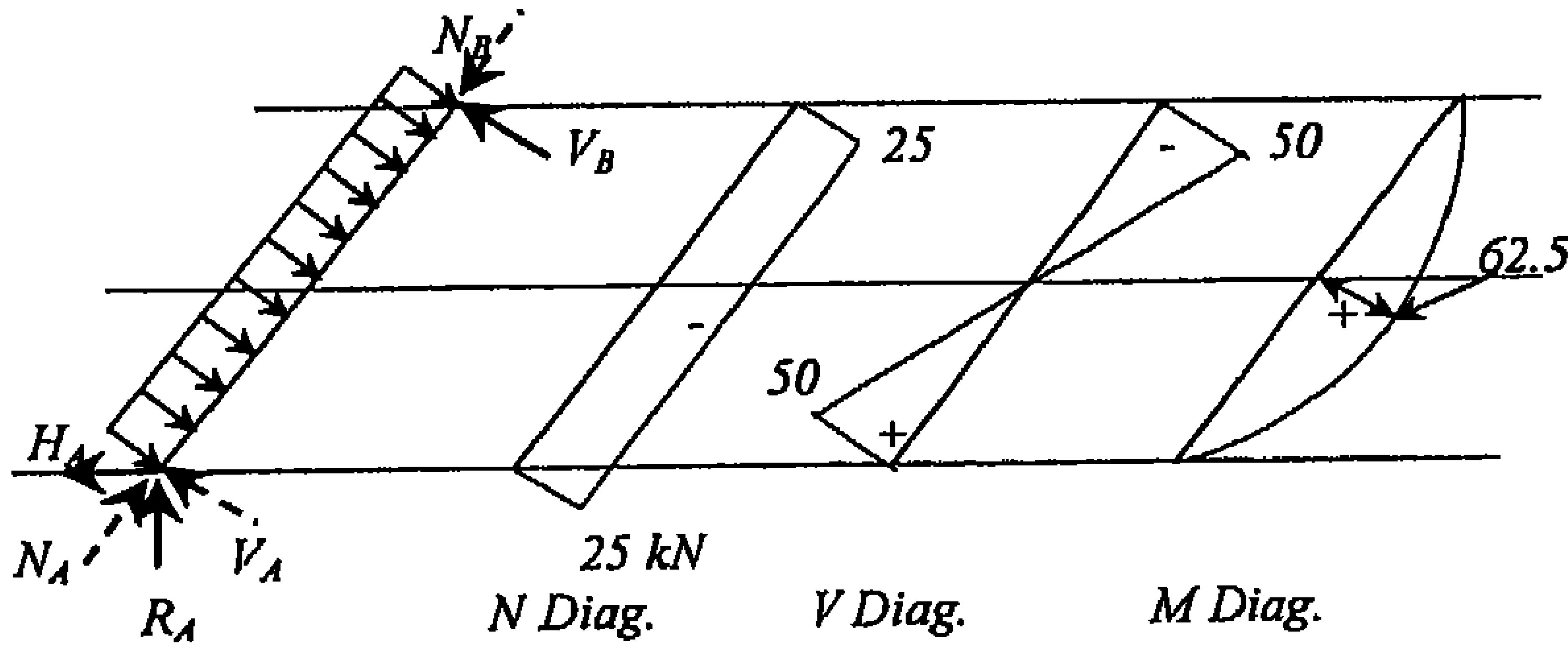
~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

أوجد ردود الفعل عند المفاصل للإطار الموضح ثم ارسم منحنيات القوة المحورية والقص وعزوم الانحناء.

الحل:





$\circlearrowleft \Sigma M @ A = 0 = -80(2) - 9V_D \Rightarrow V_D = 10\ kN \uparrow$

$\Sigma F_Y = 0 \Rightarrow R_A - 20(5)Cos\theta + 10 = 0 \Rightarrow R_A = 50\ kN \uparrow$

$\circlearrowleft \Sigma M @ B$ (من اليمين) $= 0 = 80(2) - 10(6) - 4N_D = 0 \Rightarrow N_D = 25\ kN \rightarrow$

$\Sigma F_X = 0 \Rightarrow H_A = 25\ kN \leftarrow$

العضو AB:

$V_A = 50Cos\theta + 25Sin\theta = 50(0.6) + 25(0.8) = 50\ kN$
$N_A = -50Sin\theta + 25Cos\theta = -50(0.8) + 25(0.6) = -25\ kN$

من منحنى القص عند منتصف المسافة بين $A\&B$ حيث القص يساوي صفرا نجد أن:
~~~~~~~~~~~~~~~~

$M \quad = \frac{1}{2}(50)(2.5) \ = 65.5\ kN.m$

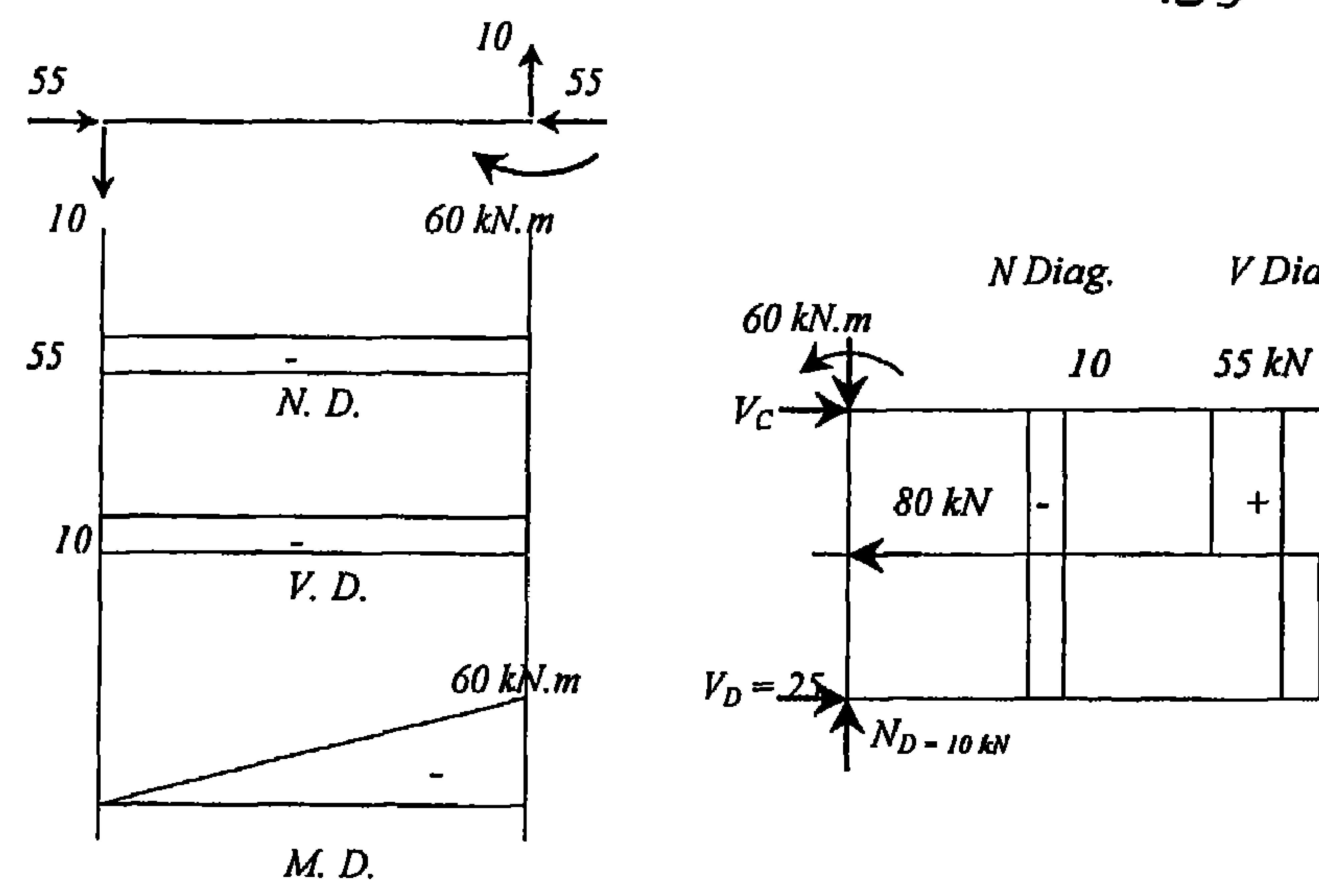
$= 62.5\ kN.m$ check

العضو CD:

$\circlearrowright \sum M @ C = 0 = 80(2) - M_C - 25(4) \quad \Rightarrow \quad M_C = 60\ kN.m \circlearrowleft$

العضو BC:

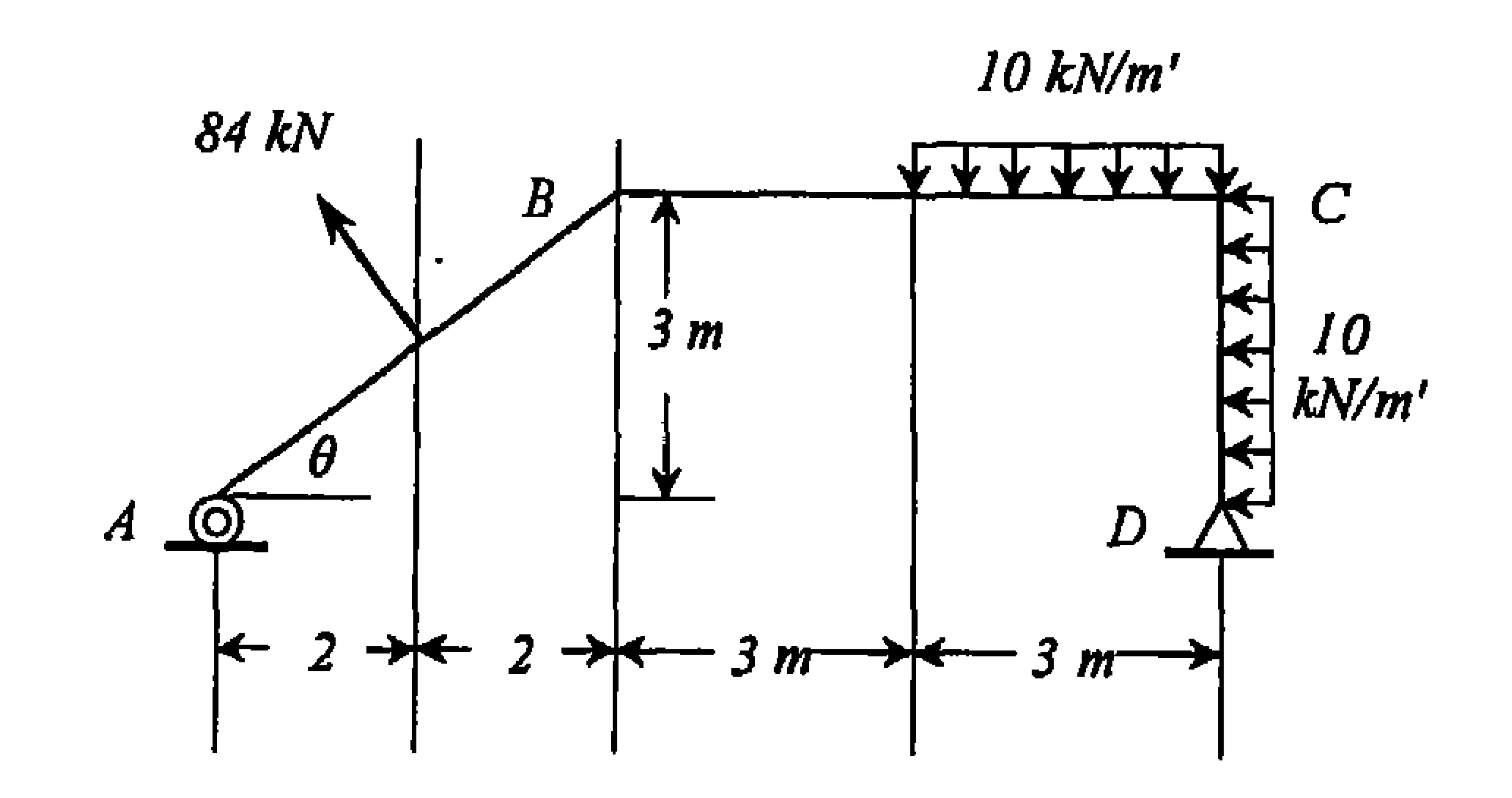
تم تحقيق معادلات الاتزان.



~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

للإطار الموضح، ارسم منحنيات القوى الداخلية (القوة المحورية وقوة القص وقوة عزوم الانحناء).



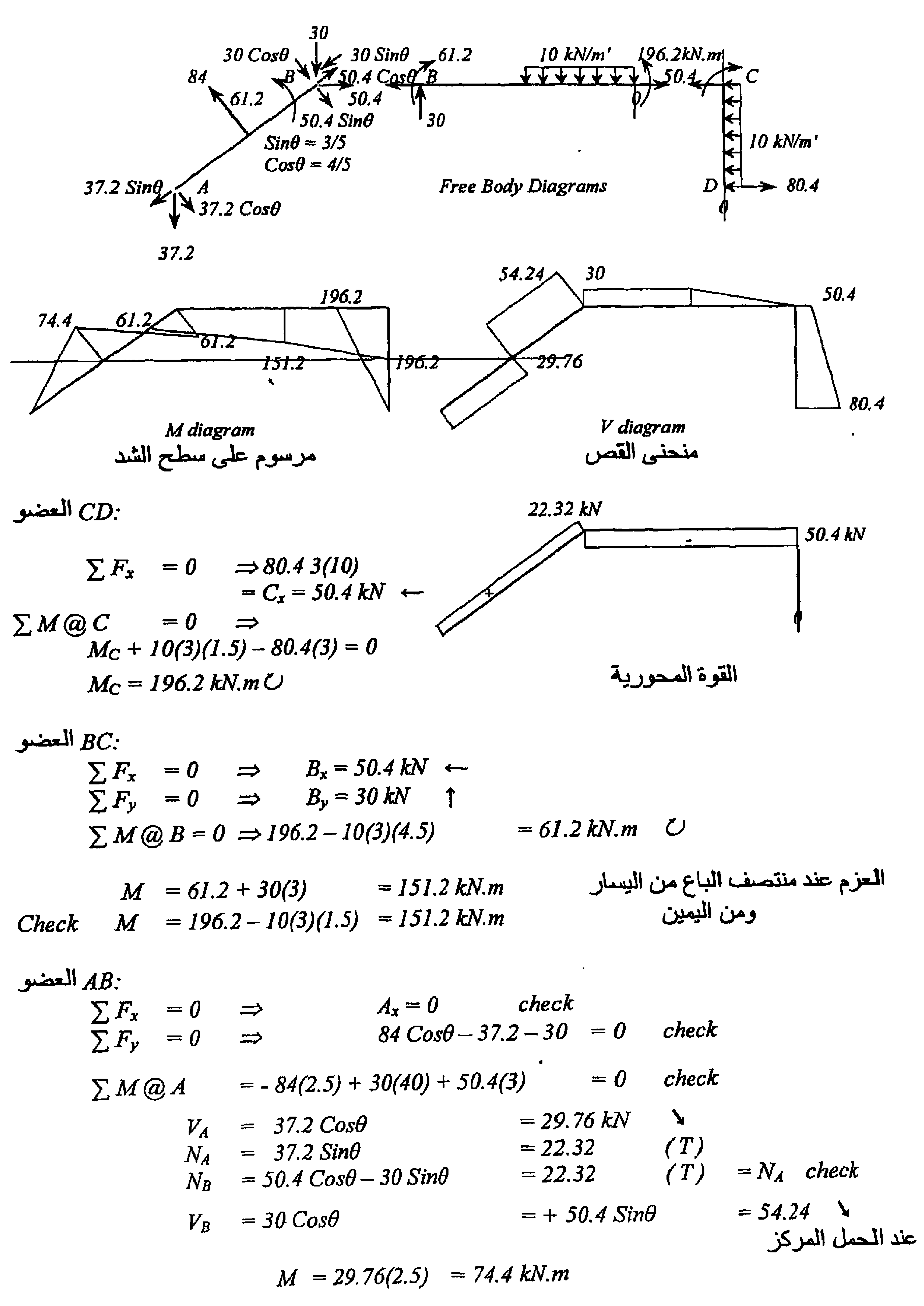
الحل:

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

$D_x = 84(3/5) + 10(3) = 80.4\ kN \rightarrow$

$\sum M @ A = 0 \Rightarrow \quad -84(5/2) + 10(3)(8.5) - 10(3)(1.5) - 10D_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad D_Y = 0$

$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_Y + 84(4/5) - 10(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_Y = 37.20\ kN \downarrow$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~



العضو CD:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow 80.4\ 3(10)$

$= C_x = 50.4\ kN \leftarrow$

$\sum M @ C = 0 \Rightarrow$

$M_C + 10(3)(1.5) - 80.4(3) = 0$

$M_C = 196.2\ kN.m \circlearrowleft$

العضو BC:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 50.4\ kN \leftarrow$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = 30\ kN \uparrow$

$\sum M @ B = 0 \Rightarrow 196.2 - 10(3)(4.5) = 61.2\ kN.m \circlearrowleft$

$M = 61.2 + 30(3) = 151.2\ kN.m$ العزم عند منتصف الباع من اليسار

Check $M = 196.2 - 10(3)(1.5) = 151.2\ kN.m$ ومن اليمين

العضو AB:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$ check

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 84 \cos\theta - 37.2 - 30 = 0$ check

$\sum M @ A = -84(2.5) + 30(40) + 50.4(3) = 0$ check

$V_A = 37.2 \cos\theta = 29.76\ kN \searrow$

$N_A = 37.2 \sin\theta = 22.32\ (T)$

$N_B = 50.4 \cos\theta - 30 \sin\theta = 22.32\ (T) = N_A$ check

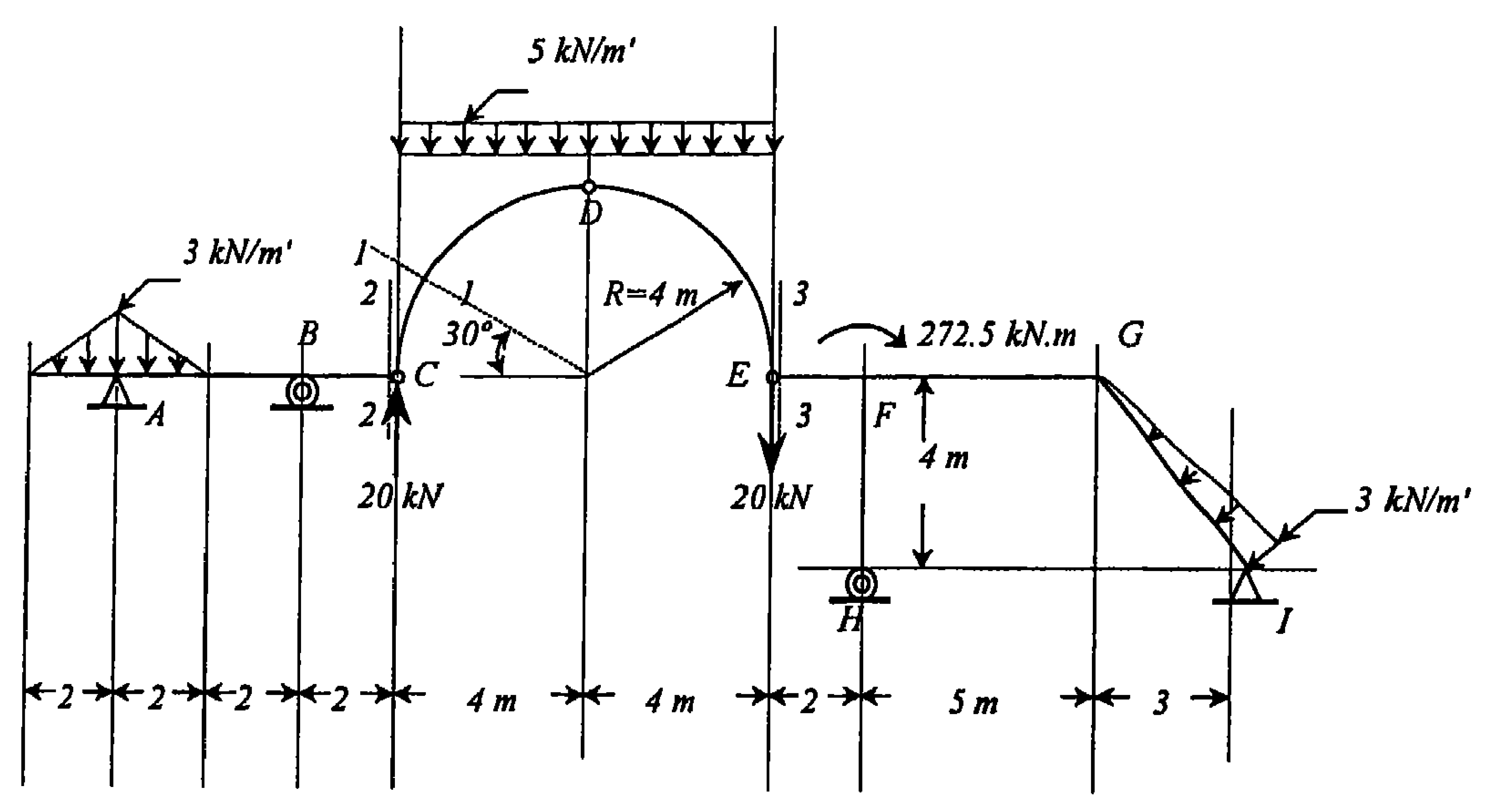
$V_B = 30 \cos\theta = +\ 50.4 \sin\theta = 54.24 \searrow$

عند الحمل المركز

$M = 29.76(2.5) = 74.4\ kN.m$

مثال:

للمنشأ التالي، أوجد القوى المحورية والقص وكذلك العزوم عند المقطع (1-1). ثم ارسم منحنى القص للجزء الواقع يسار المقطع (2-2)، ومنحنى عزم الانحناء الواقع يمين المقطع (3-3).



الحل:

ردود الأفعال عند نقاط التثبيت:

$\circlearrowleft \sum M @ C\ (left) = 0 \ \Rightarrow$

$$6A_y + 2B_y - \tfrac{1}{2}(3)(4)(6) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3A_y + B_y = 18 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$\circlearrowleft \sum M @ E\ (left) = 0 \ \Rightarrow$

$$14A_y + 10B_y + 20(8) - \tfrac{1}{2}(3)(4)(14) - 5(8)(4) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 7A_y + 5B_y = 42 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$5 \times (1) - (2) \quad \Rightarrow$

$$8A_y = 48 \qquad \Rightarrow A_y = 6\ kN \uparrow$$

$Eq.\ (1) \quad \Rightarrow \quad B_y = 18 - 6(3) \qquad = 0$

$\circlearrowleft \sum M @ D\ (left) = 0 \ \Rightarrow$

$$6(10) + 20(4) - \tfrac{1}{2}(3)(4)(10) - 5(4)(2) - A_x(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 10\ kN \quad \longrightarrow$$

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

$$10 - \tfrac{1}{2}(3)(3)(4/3) + I_x = 0 \quad \Rightarrow \quad I_x = -4 \quad \Rightarrow \quad I_x = 4\ kN \leftarrow$$

$\circlearrowleft \sum M @ I = 0 \quad \Rightarrow$

$$6(24) + 20(18) + 8H_y + 272.5 + 10(4) - \tfrac{1}{2}(3)(4)(24) - 5(8)(14)$$

$$- 10(10) - \tfrac{1}{2}(3)(5)(5/3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_y = 0$$

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

$$6 - 6 + 20 - 5(8) - 10 - \tfrac{1}{2}(3)(5)(3/5) + I_y = 0 \quad \Rightarrow \quad I_y = 34.5\ kN \ \uparrow$$

تحقيق:

$$\circlearrowleft \sum M @ E\ (right) = 272.5 + 4(4) - 34.5(10) + \tfrac{1}{2}(3)(5)(3/5)(7+2)$$

$$+ \tfrac{1}{2}(3)(5)(4/5)(2/3)(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad check$$

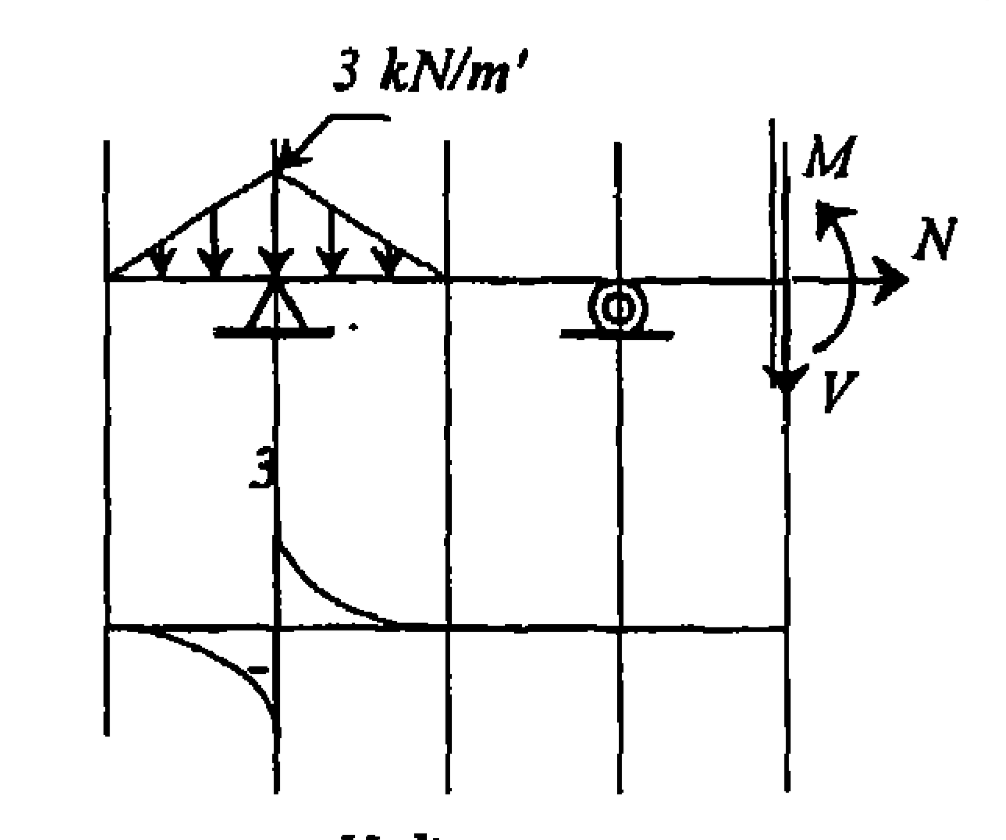
يسار المقطع (2-2):

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

$N = -10\ kN\ \ (c)$

$V = 0$

$M = 6(6) - ½\,(3)(4)(6) = 0$



V diag.

Right of sec. 3-3:

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

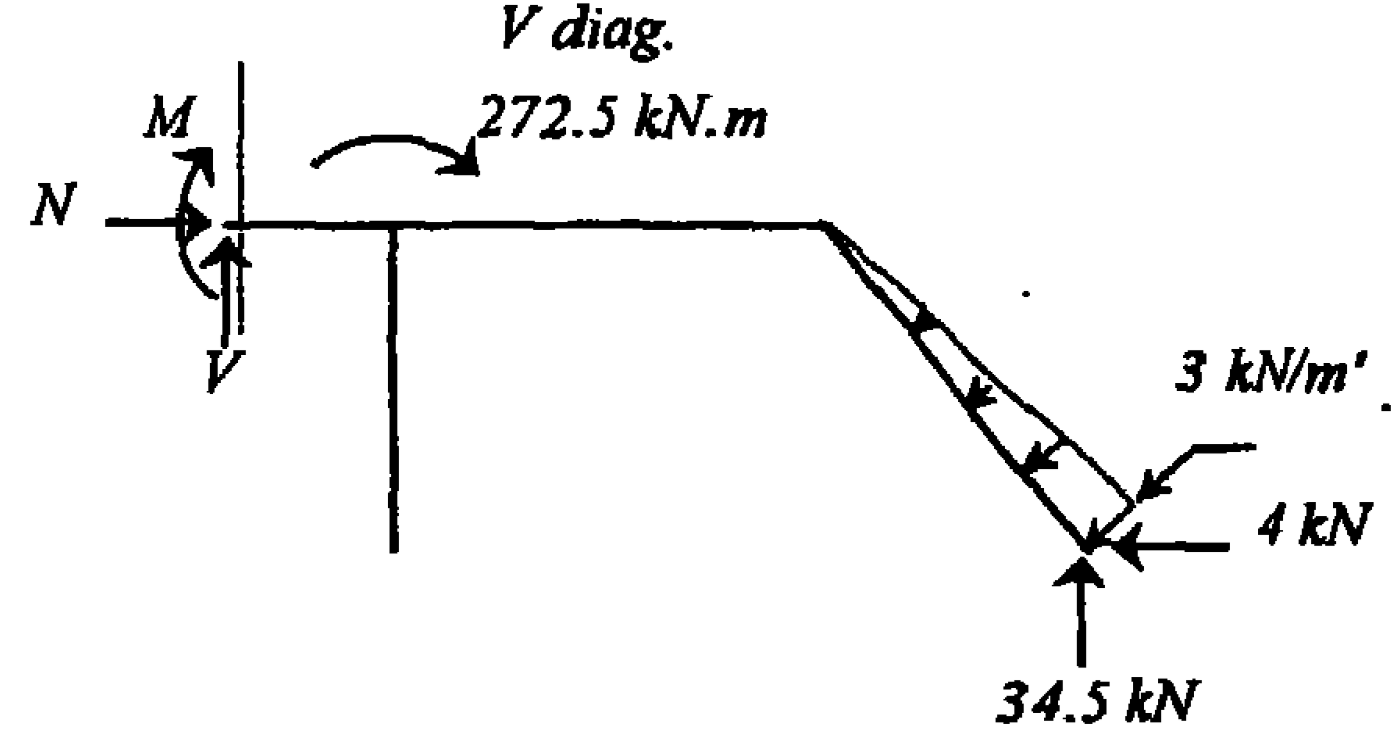
$N = 6 + 4 = 10\ kM \quad (c) \rightarrow$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow$

$V - 4.5 + 34.5 = 0 \quad \Rightarrow$

$V = 30\ kN \quad \downarrow (-ve)$

$\sum M = 272.5 + 4.5(9) + 6(2/3)(4) + 4(4) - 34.5(10) = 0 \quad check$

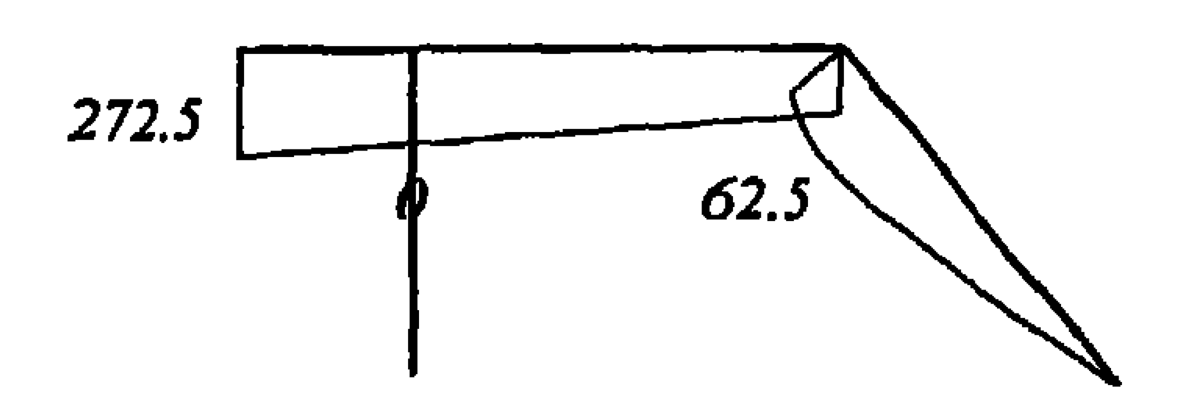


$M @ G$ (يمين) $= 34.5(3) - 4(4) - ½\,(3)(5)(2/3)(5)$
$= 62.5\ kN.m$

Or:

$M @ G$ (يسار) $= 272.5 - 30(7) = 62.5$

وهذا تحقيق آخر



منحنى العزم على سطح الشد

عند المقطع (1-1) نجد أن:

$a = 4 - 4Cos\ 30° = 0.536\ m$

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$

$10 - N\,Cos\ 60° + V\,Cos\ 30° = 0$

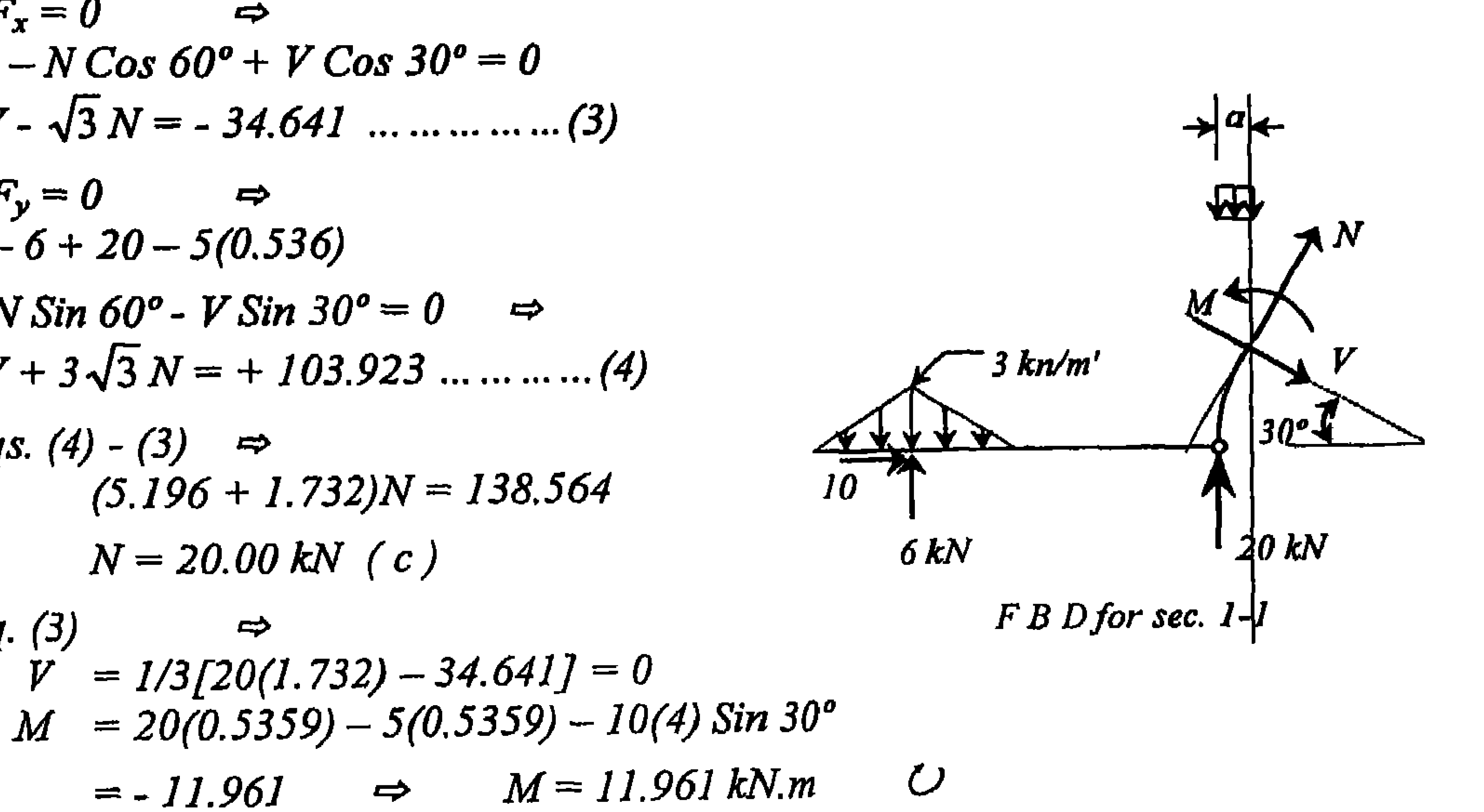
$3V - \sqrt{3}\,N = -34.641 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow$

$6 - 6 + 20 - 5(0.536)$

$-N\,Sin\ 60° - V\,Sin\ 30° = 0 \quad \Rightarrow$

$3V + 3\sqrt{3}\,N = +103.923 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$



F B D for sec. 1-1

Eqs. (4) - (3) $\Rightarrow$

$(5.196 + 1.732)N = 138.564$

$\Rightarrow \quad N = 20.00\ kN\ \ (c)$

Eq. (3) $\Rightarrow$

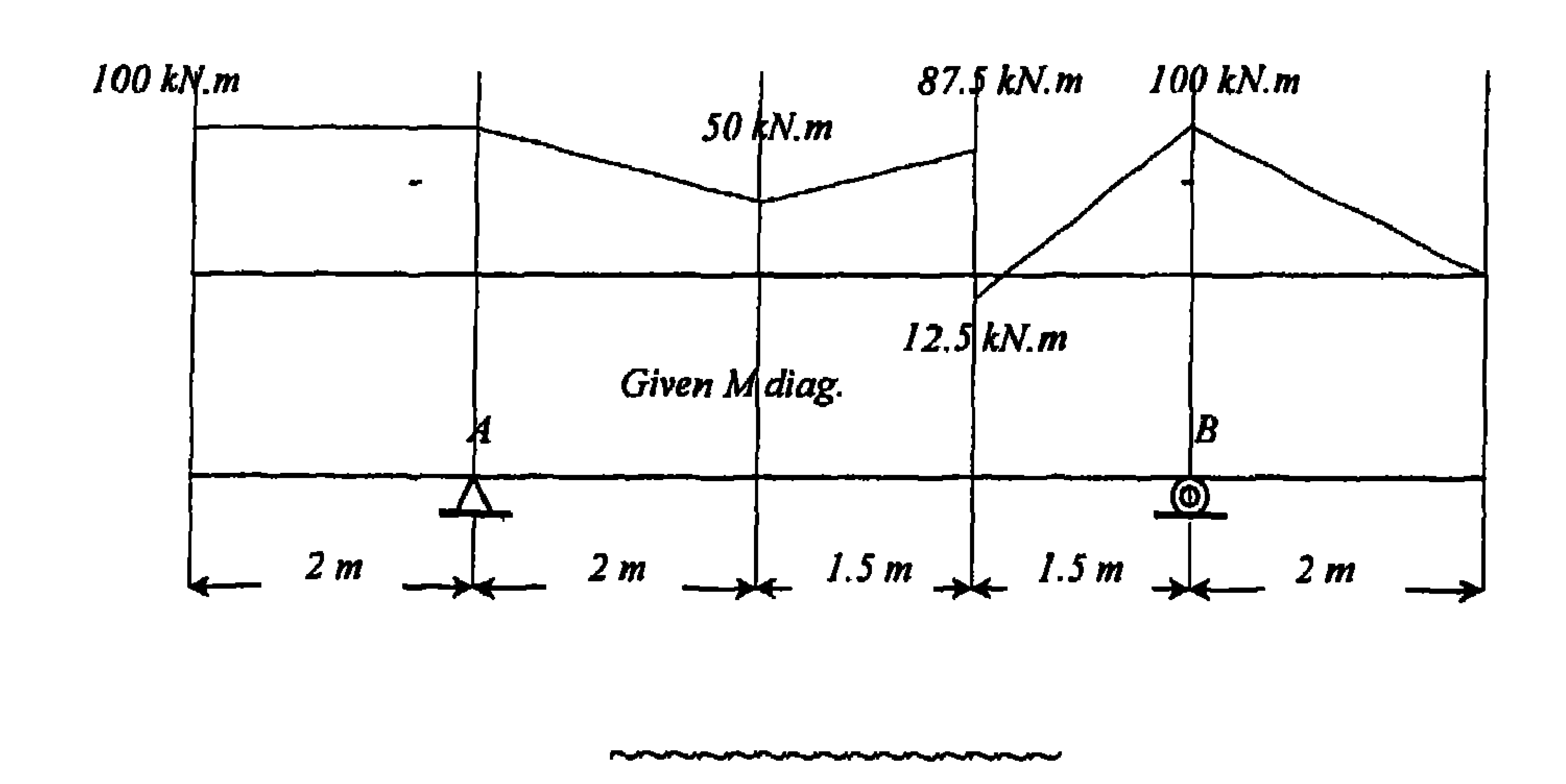
$V = 1/3[20(1.732) - 34.641] = 0$

$M = 20(0.5359) - 5(0.5359) - 10(4)\,Sin\ 30°$

$= -11.961 \quad \Rightarrow \quad M = 11.961\ kN.m \quad \circlearrowleft$

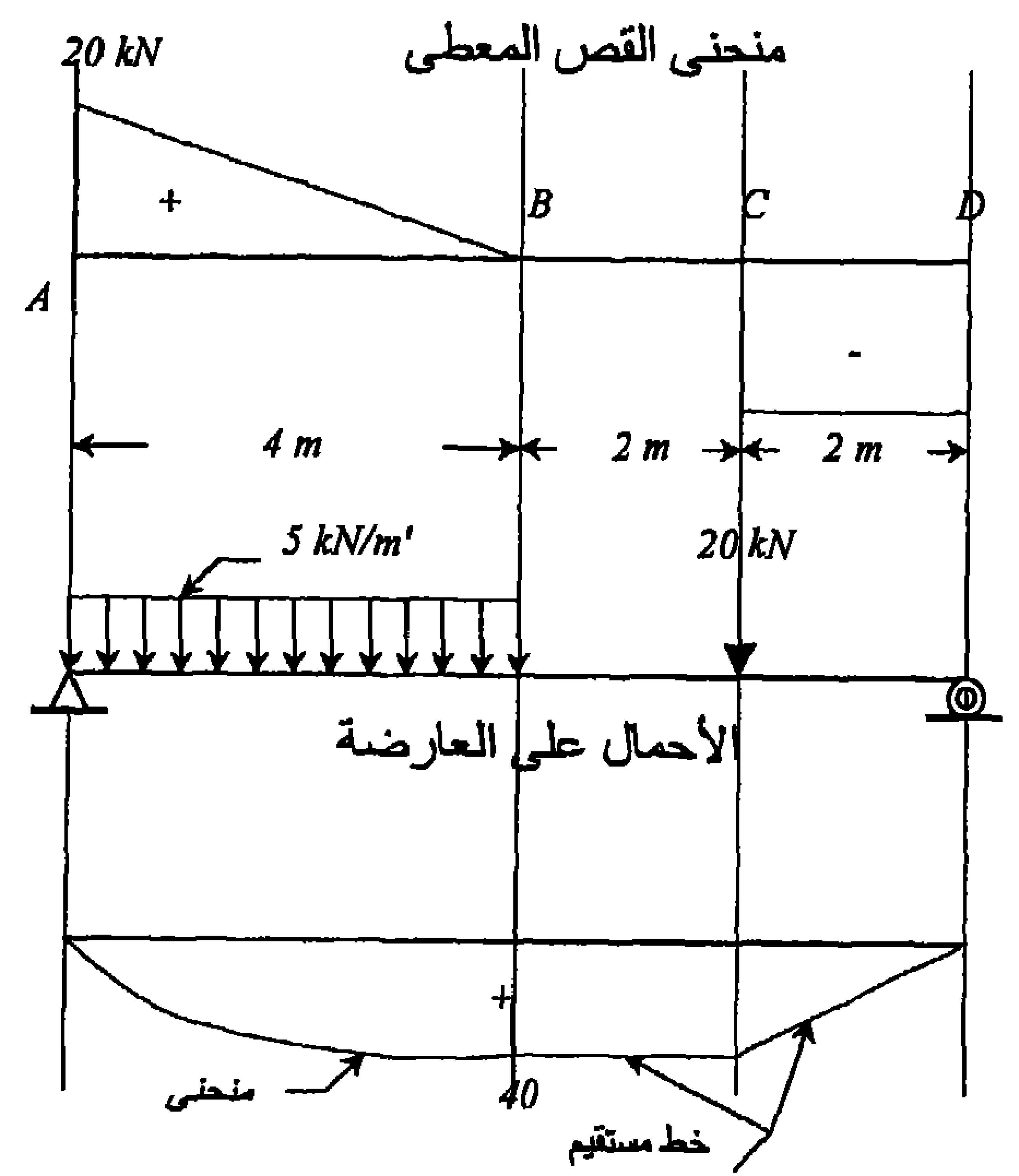
تمرين:

الشكل التالي يمثل منحنى العزوم لكمرة بسيطة. المطلوب تحديد قيمة ونوع واتجاه الأحمال التي على هذه الكمرة. أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت وارسم منحنى القص.



مثال:

الشكل الموضح منحنى القص لكمرة بسيطة. أوجد الأحمال على هذه الكمرة وارسم منحنى العزوم لها.



الحل:

ابتداء من اليسار نجد أن هناك حمل مركز أو نقطة ارتكاز رد الفعل فيها يساوي $20 kN$. بين النقطتين $A\&B$ يتناقص منحنى القص من $20\ kN$ إلى الصفر بخط مستقيم مما يدل على وجود حمل موزع ثابت الكثافة w. ميل هذا المستقيم يكافىء $w = 20/4 = 5 kN/m' \downarrow$

بين النقطتين $B\&C$ لا يوجد قص مما يفيد أنه لا يوجد تحميل. عند النقطة C لدينا هبوط مفاجىء بقيمة $20\ kN$ مما يدل على وجود حمل مركز بهذه القيمة عند C. بين $C\&D$ القص ثابت دالا على عدم وجود أحمال. عند D يقفل منحنى القص بمقدار رد الفعل عند الكرسي D.

منحنى عزم الانحناء:

من منحنى القص نبنى منحنى العزوم وذلك بأن التغير في عزم الانحناء بين نقطة وأخرى يكافىء مساحة القص بين هاتين النقطتين. وعليه:

$M@A \quad = 0$

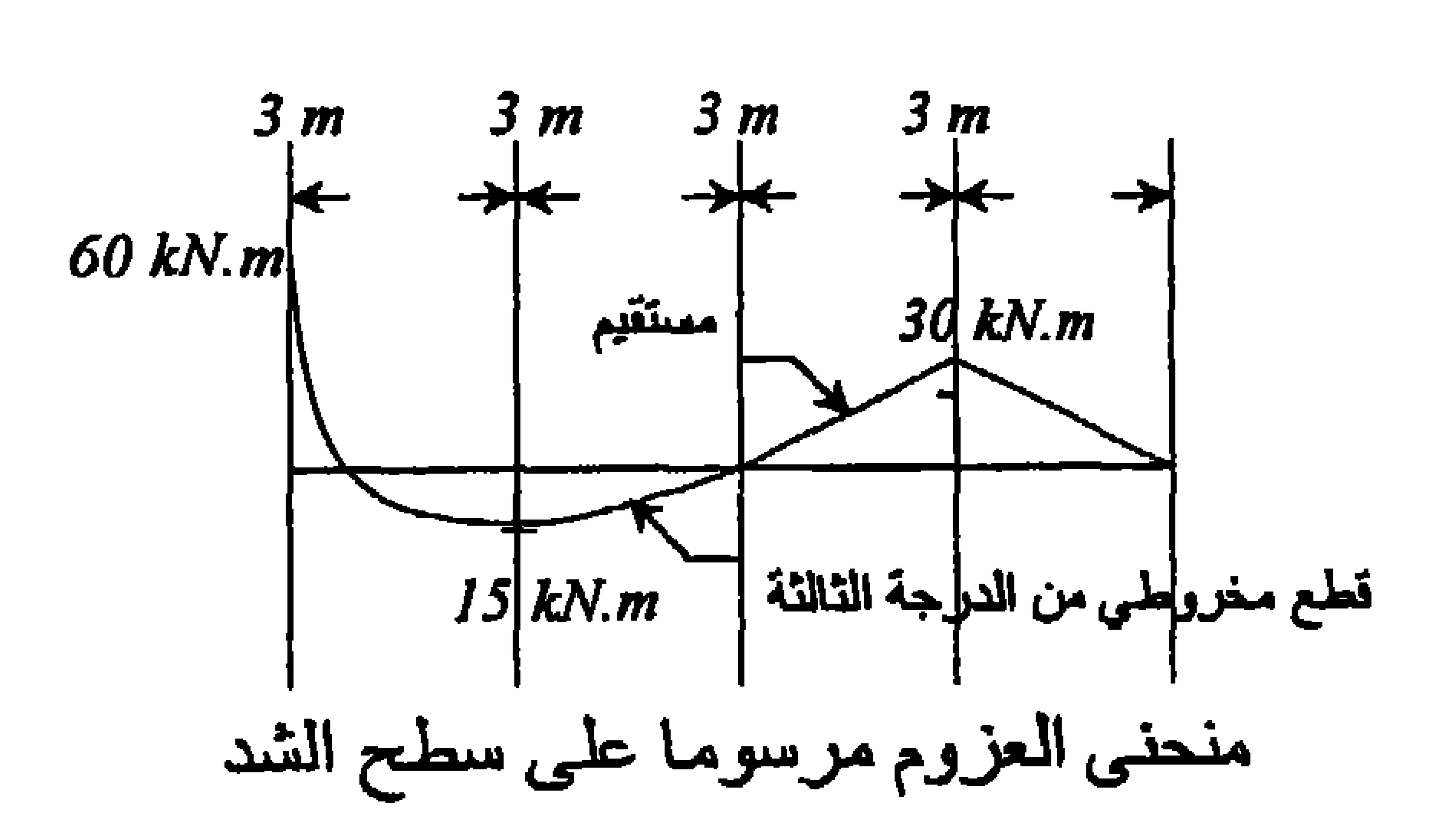
$M@B \quad = ½ (20)(4) = 40\ kN.m$

$M@C \quad = 40\ kN.m$ (لم يحدث تغير)

$M@D \quad = 40 - 20(2) = 0\ check$

تمرين:

الشكل الجانبي يمثل منحنى العزوم لعارضة. أوجد الأحمال على العارضة وارسم منحنى القص لها.



منحنى العزوم مرسوما على سطح الشد

5 الباب الخامس

ترخيم المنشآت

5- ترخيم المنشآت

يقصد بالترخيم، أو التشوه أو الانحراف، في المنشآت الازاحة التي تحدث لمحور الخمول لأي عضو في المنشأ نتيجة تعرضه لأحمال خارجية. ومعرفة مقدار هذه الازاحة من الأهمية بمكان لضمان سلامة المنشا وكذلك ألاطمئنان النفسي عند استعمال المنشأ حيث يتسبب التغير في شكل وأبعاد المنشأ نوع من عدم الراحة والاضطراب عند بعض الناس. والترخيم أو التشوه قد يسبب مشاكل انشائية تفضى الىعدم سلامة المنشأ. حيث عند زيادة التشوه عن الحد الذى تسمح به المواصفات في الانشاءات إلى ظهور تشققات في طبقة اللياسة وتساقطها أو ان يحدث تغيرات ونتوآت في الأرضيات للمنشآت. المنشآت الغير محددة استاتيكيا غالبا ما يتم تحليلها بالاستعانة بحسابات التشوه فيها نتيجة ما تتعرض له من أحمال. ويوجد العديد من الطرق لحساب التشوه في المنشآت سنتطرق إلى مجموعة منها. جميع هذه الطرق ستكون معتمدة على الافتراض بأن المنشأ وعناصره متكونة من مواد مرنة تحقق قانون المرونة.

1-5 طريقة التكامل الثنائي

يعبر عن التقوس لعارضة متوازية المستطيلات تحت تأثير عزم انحناء مرن بالتالي:

.... *i*

حيث:

$M(x)$ = عزم الانحناء ومحور العارضة الطولي في اتجاه المحور السيني x

E = معامل المرونة (معامل ينج للمرونة)

I = عزم القصور الذاتي حول محور الخمول

EI = الصلابة أو الجساوة للعارضة

من مبادىء حساب المثلثات نعلم أن التقوس لمنحنى في المستوى عند نقطة يعبر عنه بالتالي:

.... *ii*

حيث:

y = ألإزاحة في الكمرة عموديا على المحور السيني x

$\frac{dy}{dx}$ = ميل المماس للعارضة

عندما تكون الاجهادات في العارضة في حدود المرونة، يكون ميل المماس للمنحنى المرن (dy/dx) ضئيل في الصغر مما يمكن من إهمال الكمية $(dy/dx)^2$ مقارنة بالوحدة في المقام. وعليه يمكن إعادة كتابة المعادلة *(ii)* على النحو التالي:

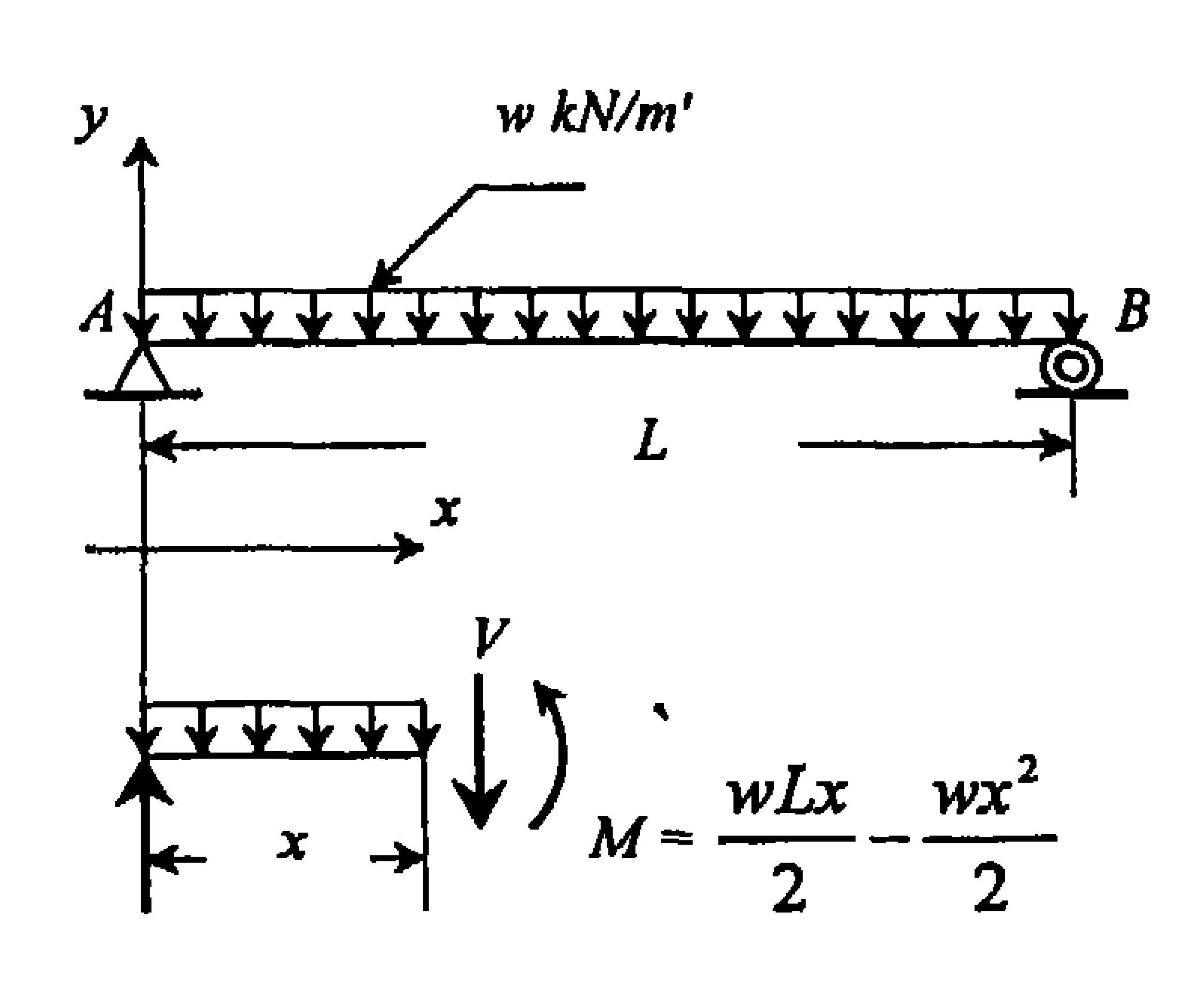
.... *iii*

من المعادلتين *(i) & (iii)* ينتج أن

.... *iv*

وهذه المعادلة *(vi)* معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية. إذا تم تكاملها للمرة الأولى نحصل على ميل المماس للمنحنى المرن للعارضة، في حين إتمام تكاملها ثانية يعطى معادلة الانحراف أو التشوه في الكمرة.

مثال:
استنتج معادلة التشوه للعارضة الموضحة.
عين مقدار ومكان أقصى قيمة للترخيم.
اعتبر أن EI = مقدار ثابت.



الحل:
المعدلة العامة البسطة للتقوس هي

من التكامل الأول ينتج أن:

من التكامل الثاني ينتج أن:

من الشروط المحيطية نجد أن:
عند $x = 0, y = 0$ ومنه
$y = 0 = C_2$

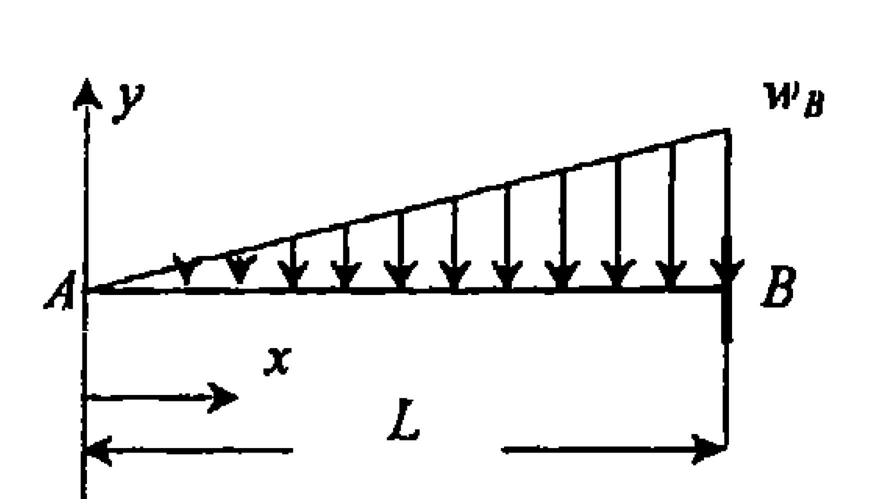
ومن الشروط المحيطية
عند $x = L, y = 0$ ومنه

⇨ $y = 0 =$

وعليه فان معادلة المنحنى المرن تأخذ الشكل التالي:

بسبب التماثل في الخواص الهندسية للعارضة وما عليها من أحمال، يتضح أن أقصى قيمة للترخيم تحدث عند منتصف العارضة. ومن ناحية أخرى فالترخيم يكون عند النقطة التي يكون فيها ميل المماس للمنحنى المرن (dy/dx) مساويا للصفر. وبوضع الميل مساويا للصفر في معادلة ميل المماس نجد أن $x = L/2$.
عند $x = L/2$ نجد أن:

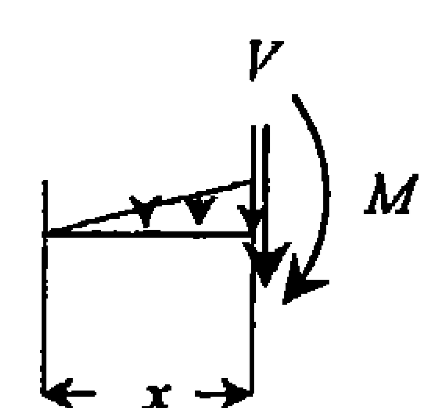
مثال:



الشكل المجاور لكابولي عليه حمل موزع متغير الكثافة خطيا. أوجد معادلة الترخيم للمنحنى المرن لهذا الكابولي. أوجد كذلك زاوية ميل المماس عند الطرف الحر.

اعتبر EI = مقدار ثابت.

الحل:



$$M_x = ½\, x \cdot w_B \cdot x/L \cdot x/3 =$$

بتكامل هذه المعادلة مرتين نحصل على:

and

من الشروط المحيطية أو الحدية التي يجب توفيرها أن:

$$@x = L \quad ⇨ \quad y = 0 \quad and \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

وعليه

$$= 0 \quad ⇨$$

و

$$⇨$$

أو $\therefore$

ميل المماس أو دوران الطرف الحر:



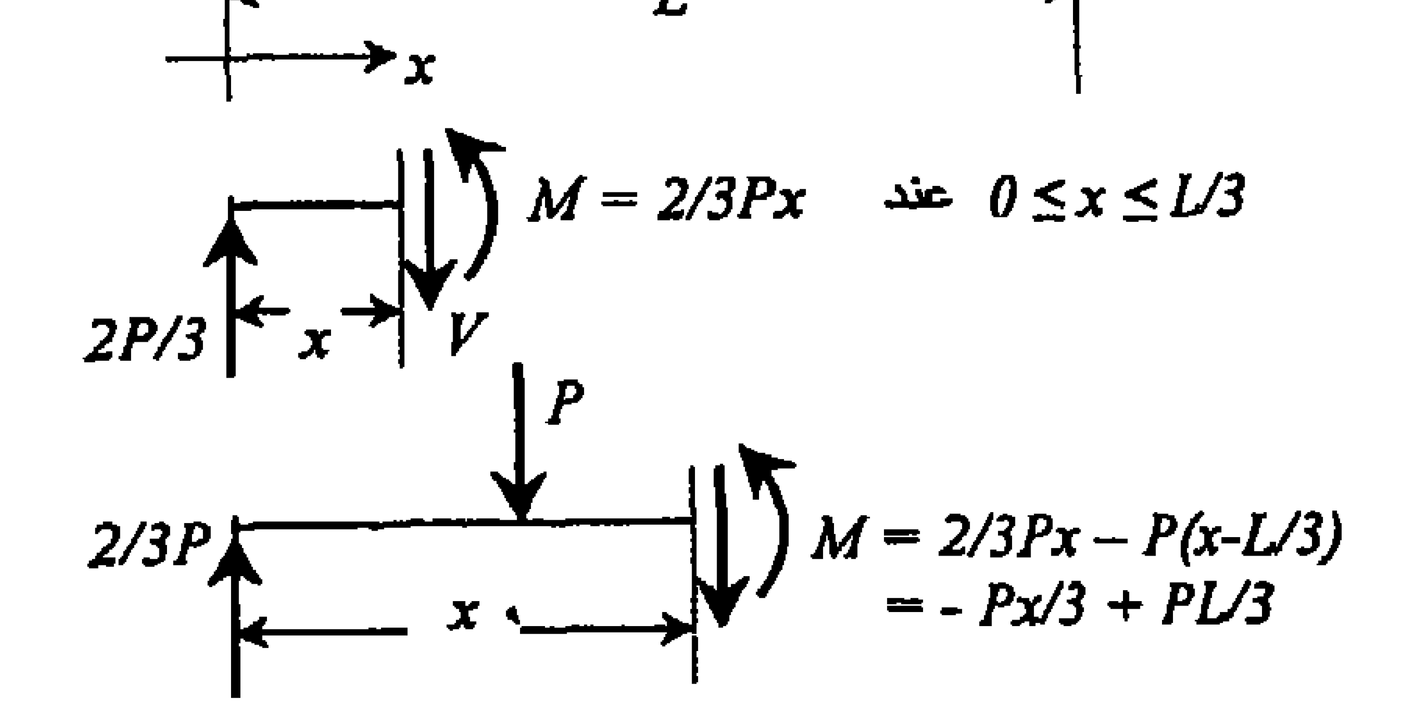
مثال:

أوجد معادلة منحنى الترخيم للعارضة الموضحة.

اعتبر EI = ثابت.

الحل:

المعادلة التفاضلية للمنحنى المطلوب هي:



عندما

$0 \le x \le L/3$

نجد أن

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} =$$

من التكامل ينتج أن:

and

عندما

$L/3 \le x \le L$:

نجد أن:

$$\frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} =$$

من التكامل ينتج أن:

و

من الشروط المحيطية أو الحدية التي يجب توفيرها أن:

$@\, x = 0,\ \ y = 0 \qquad \& \qquad @ \quad x = L,\ \ y = 0$

الاستمرارية أو معادلات التكافؤ التي يجب تحقيقها عند $L/3$ هي:

$y_{يسار} = y_{يمين}$ & $\quad$ $_{يسار} =$ $\quad$ $_{يمين}$

عليه باستخدام هذه الشروط الأربعة، يمكن تحديد قيم الثوابت الأربعة للتكامل وينتج أن:

$@\, x = 0, \qquad y = 0 \ \Rightarrow \ \ C_2 = 0$

@ $x = L,$ $= 0$

@ $x = L/3,$ ⇨ $=$

@ $x = L/3,$ $y_{\text{يسار}} = y_{\text{يمين}}$ ⇨

$=$

من حل هذه المعادلات نجد أن:

$C_1 = -10PL^2/162,\quad C_3 = -19PL^2/162,\quad and \quad C_4 = +19PL^3/162$

@ $x = L/3:$ $= -$

@ $x = L/3:$ $y_{L/3} = -$

لاحظ أن الإشارة السالبة تفيد أن الترخيم اتجاهه إلى أسفل. وأقصى قيمة يأخذها منحنى الترخيم اللدن حيث يكون ميل المماس يساوى صفرا. أي أنه عندما يكون

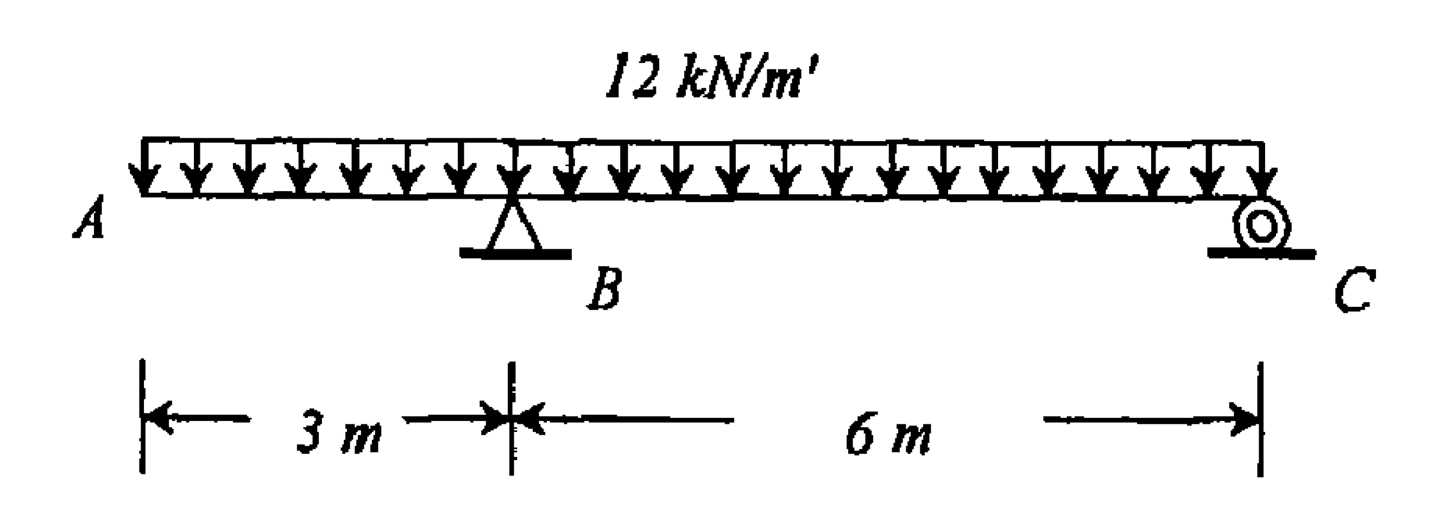
$$dy/dx = 0.$$

~~~~~~~~~~~~~~~~

تمرين:
أوجد ميل المماس للمنحنى المرن يسار المفصل $B\ (\theta_B)$ والترخيم الرأسي عند نفس المفصل.
خذ EI = مقدار ثابت.

A 12 kN/m' B 81 kN.m C
3 m 6 m

تمرين:
أوجد ميل المماس لمنحنى الترخيم عند المفاصل $B\ \&\ C\ (\theta_B\ \&\ \theta_C)$ وكذلك الترخيم الرأسي عند الطرف A.
أوجد قيمة ومكان أقصى ترخيم بين $B\ \&\ C$ معتبرا أن قيمة EI ثابتة.


~~~~~~~~~~~~~~~~

5-2 طريقة العارضة المرافقة

سبق توضيح العلاقة بين الأحمال والقص والعزوم أنها تأخذ الشكل الآتي:

$$w = dV/dx, \quad V = dM/dx$$

أي أن كثافة الحمل الموزع تكافىء التغير في القص بالنسبة للمسافة، وأن القص يكافىء التغير في العزم بالنسبة للمسافة. وكذلك تم توضيح أن

$$d^2y/dx^2 = M/EI$$

أي أن العزم يتناسب مع التغير الثاني للترخيم بالنسبة للمسافة، حيث y تعبر عن الترخيم للعارضة و ميل المماس أو الدوران للعارضة عند أي نقطة يعبر عنه $dy/dx = \theta$. والتفاضلات المتتالية للترخيم y بالنسبة للمسافة x ينتج عنها:

&

حيث:

y = الترخيم

= θ = الدوران أو ميل المماس

EI = M = عزم الانحناء .... (1)

EI = V = قوة القص

EI = w = كثافة الحمل الموزع

وعليه، ينتج أن التفاضلات المتتالية تفيض من الترخيم أو التشوه إلى الأحمال. وقد تم توضيح أن منحنيات القص والعزوم يمكن الحصول عليها بإجراء عملية التكامل للأحمال للحصول على القص، وإجراء عملية التكامل للقص للحصول على العزوم. وعلى هذا الأساس وبعملية التناظر، يمكن إجراء عملية التكامل لمنحنى M/EI لعارضة مرنة ينتج عنها منحنى لميل المماس، وإجراء عملية تكامل لمنحنى ميل المماس ينتج عنها منحنى للتشوه. أي أن مقادير الميل للمماس ومقادير التشوه للعارضة الحقيقية يمكن الحصول عليها من تناظر منحنيات القص والعزوم لعارضة مرافقة أحمالها هي M/EI على الترتيب.

5-2-1 نظريات العارضة المرافقة

افرض أن منحنى M/EI لعارضة مرنة كأحمال وضعت على عارضة تخيلية سميت العارضة المرافقة. هذه العارضة المرافقة لها باع يساوى طول العارضة الحقيقية ونقاط تثبيتها استبدلت بنقاط تثبيت (سميت نقاط تثبيت أو كراسي مرافقة) يمكنها تحقيق بعض الشروط الحدودية أو المحيطية.

نظرية 1 : قوة القص عند أي نقطة على العارضة المرافقة المحملة بمنحنى M/EI للعارضة الحقيقية يكافىء ميل مماس منحنى الترخيم المرن عند النقطة المناظرة على العارضة الحقيقة.

نظرية 2 : عزم الانحناء عند أي نقطة على العارضة المرافقة المحملة بمنحنى M/EI للعارضة الحقيقية يكافىء التشوه أو الانحراف عند النقطة المناظرة على العارضة الحقيقة.

ويختصر ذلك بأنه لدينا:

$$V_{\text{عارضة مرافقة}} = \theta_{\text{عارضة حقيقية}} \quad \& \quad M_{\text{عارضة مرافقة}} = y_{\text{عارضة حقيقية}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

2-2-5 نقاط التثبيت المرافقة

تعطى طريقة العارضة المرافقة نتائج صحيحة لتشوه المنحنى المرن إذا تم الاستعاضة عن نقاط التحميل بنقاط تحميل أخرى يمكنها تحقيق الشروط التي تم توضيحها. وفيما يلي شرح لتوضيح خواص كل نوع من هذه الكراسي.

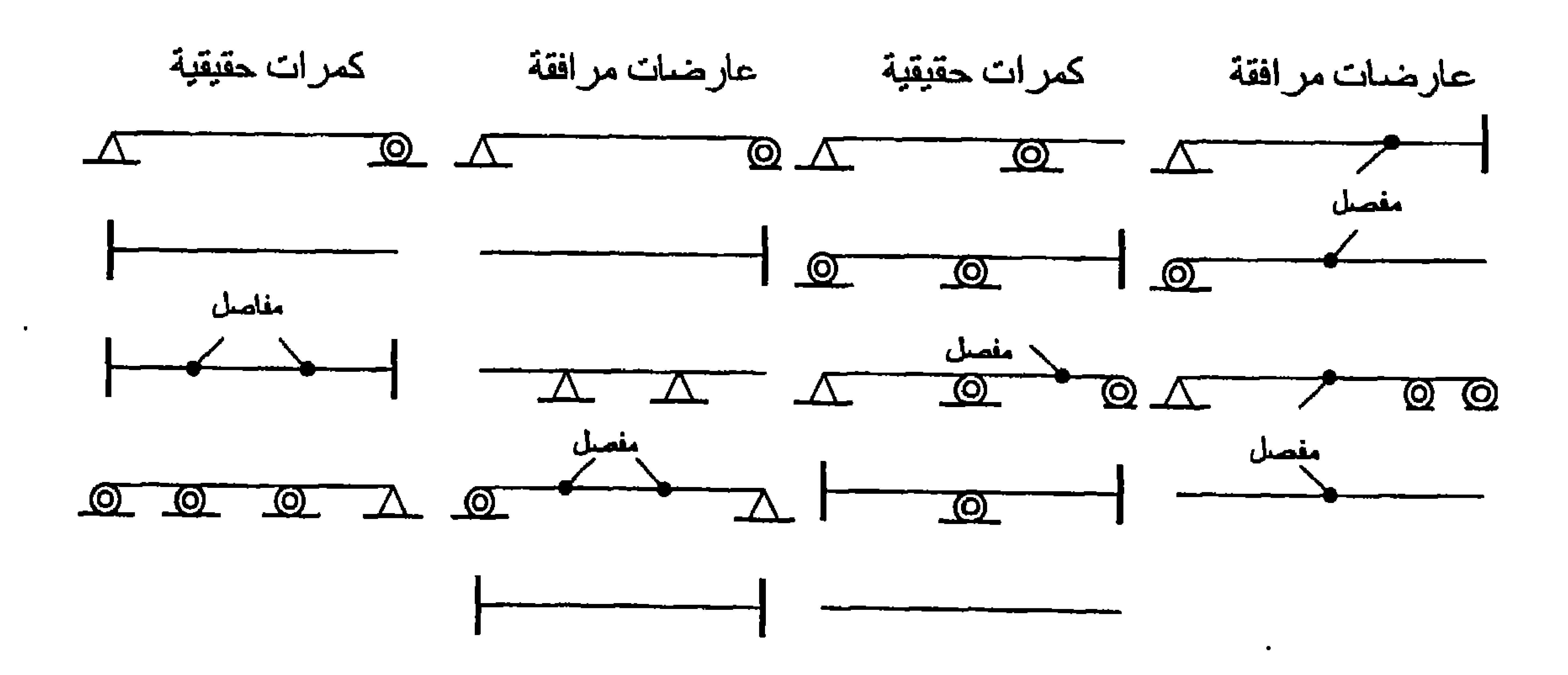
1- **نقاط التثبيت البسيطة على مستوى أملس بنهايات الكمرة الحقيقية:** يكون الكرسي المرافق من نفس النوع لأنه يحقق التناظر للشروط الحدودية المذكورة في المعادلات (1).

2- **نقاط التثبيت الثابتة:** الكمرة الحقيقية المحملة لا يمكنها أن تنحرف أو يحدث بها ترخيم أو دوران عند نقاط التثبيت الثابتة عند نهاياتها. وعليه وعند هذه النقطة على العارضة المرافقة، يجب ألا يوجد هناك قوة قص أو عزم انحناء. وهذا يتم في حالة استبدال نقطة التثبيت الثابتة الحقيقية بأخرى مرافقة حرة.

3- **نهاية حرة:** الكمرة الحقيقية يمكنها الترخيم والدوران عند طرفها الحر. وعليه فالنقطة المناظرة على العارضة المرافقة يجب أن يكون بها قوة قص وعزم انحناء والذين يمكن توفيرهما بنقطة تثبيت ثابتة.

4- **نقطة تثبيت أو كرسي داخلي:** الكمرة الحقيقية المحملة يمكنها الدوران ولكن لا يمكنها الترخيم عند نقاط التثبيت الداخلية والخارجية البسيطة. ومع هذا يكون ميل المماس مستمرا عند نقاط التثبيت الداخلية في حين أن المماس ينتهي عند نقاط التثبيت بنهاية العارضة البسيطة. ولتحقيق شرط الاستمرارية عند الكراسي الداخلية يجب أن يكون باستطاعة الكرسي المرافق أن يكون عزم الانحناء به منعدما ويمكنه نقل قوة القص دون تغيير. لذى، أي نوع من الكراسي الخارجية سوف تحدث تغيرا في القص. وشروط العادلات (2) يمكن تحقيقها باستبدال الكرسي الداخلي بمفصل مرافق داخلي.

5- **مفصل داخلي:** عند أي مفصل داخلي يكون هناك ميل للمماس لمنحنى التشوه المرن وكذلك ترخيم بالعارضة الحقيقية المحملة. وعليه فالكرسي المرافق به كل من قوة قص وعزم انحناء. ويمكن تحقيق ذلك باستبدال المفصل الداخلي الحقيقي بنقطة تثبيت بسيطة داخلية.



ملاحظات مهمة:

* - العارضة المرافقة دائما محددة استاتيكيا حتى في حالة أن العارضة الحقيقية غير محددة استاتيكيا.
* - يظهر أحيانا أن العارضة المرافقة أنها غير مستقرة ولكنها تكون مستقرة ومتزنة بفعل الحمل المرن M/EI



مثال:

أوجد ميل المماس عند $A\ (\theta_A)$ و $C\ (\theta_C)$ والترخيم الرأسي عند D و $B\ (\delta_D\ \&\ \delta_B)$ وعين مكان ومقدار أقصى ترخيم.
اعتبر قيمة EI تساوي مقدار ثابت.

الحل:

من قوانين الاتزان نجد أن:

$$V_C = 20\ kN \uparrow$$
$$\&\quad V_A = 30\ kN \uparrow$$

من العارضة المرافقة نجد أن:

$$\circlearrowleft \Sigma M @ C(\text{من جهة اليمين}) = 0$$
$$= 5\,EI\,V_{Conj\,A} - \tfrac{1}{2}(60)(3)(2) - \tfrac{1}{2}(60)(2)[3 + 2/3]$$

$$\therefore \quad V_{Conj\,A} = \frac{80}{EI} \quad \Rightarrow \quad EI\,V_{Conj\,D} = \tfrac{1}{2}(5)(60) - 80$$

$$\Rightarrow \quad V_{Conj\,D} = \frac{70}{EI}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M @ C(\text{من جهة اليسار}) = 0 \qquad EI\,M_{Conj\,D} = 70(2) = 140$$

وعليه

$$\theta_A = V_{Conj\,A} = \frac{80}{EI}\ \circlearrowleft, \qquad \theta_C = V_{Conj\,C} = \frac{70}{EI}\ \circlearrowleft,$$

$$\& \qquad \delta_{DV} = M_{Conj\,D} = \frac{140}{EI} \uparrow$$

$$EI\,M_{Conj\,B} = 80(2) - \tfrac{1}{2}(60)(2)(2/3) = 160 - 40 = 120 < 140$$

$$\therefore \quad \delta_B = M_{Conj\,B} = \quad \downarrow$$

$$\therefore \quad \delta_{max} = \frac{140}{EI} \quad @\ D\ \uparrow \quad = \text{أقصى قيمة مطلقة للازاحة الرأسية}$$

تمرين:

أوجد ميل المماس عند كل من $A\ (\theta_A), B\ (\theta_B)$ و $C\ (\theta_C)$ والإزاحة الرأسية عند $A\ (\Box_A)$ ثم عين مكان وقيمة أقصى تشوه بين $B\ \&\ C$.
افرض أن قيمة EI ثابتة.

مثال:

أوجد ميل المماس للمنحنى المرن وكذلك الإزاحة عند الطرف الحر للكابولي الموضح. قيمة EI ثابتة.

P A

L/2 L/2

PL/2

منحنى العزوم

PL/2

$\frac{PL}{2EI}$ V_a M_a

العارضة المرافقة عليها الحمل المرن M/EI

الحل:

$\theta_a = V_{aCB} = -$

$=$ ↷

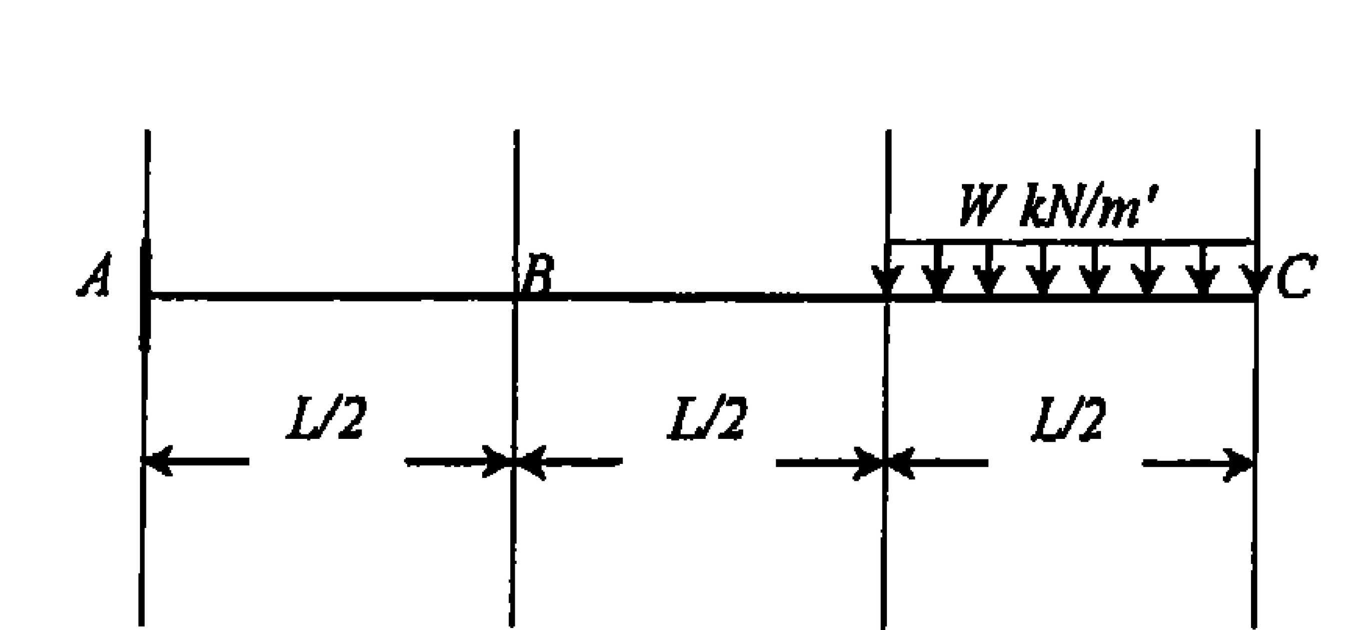
$=$ ↓

تمارين:

باستعمال العارضة المرافقة أوجد:

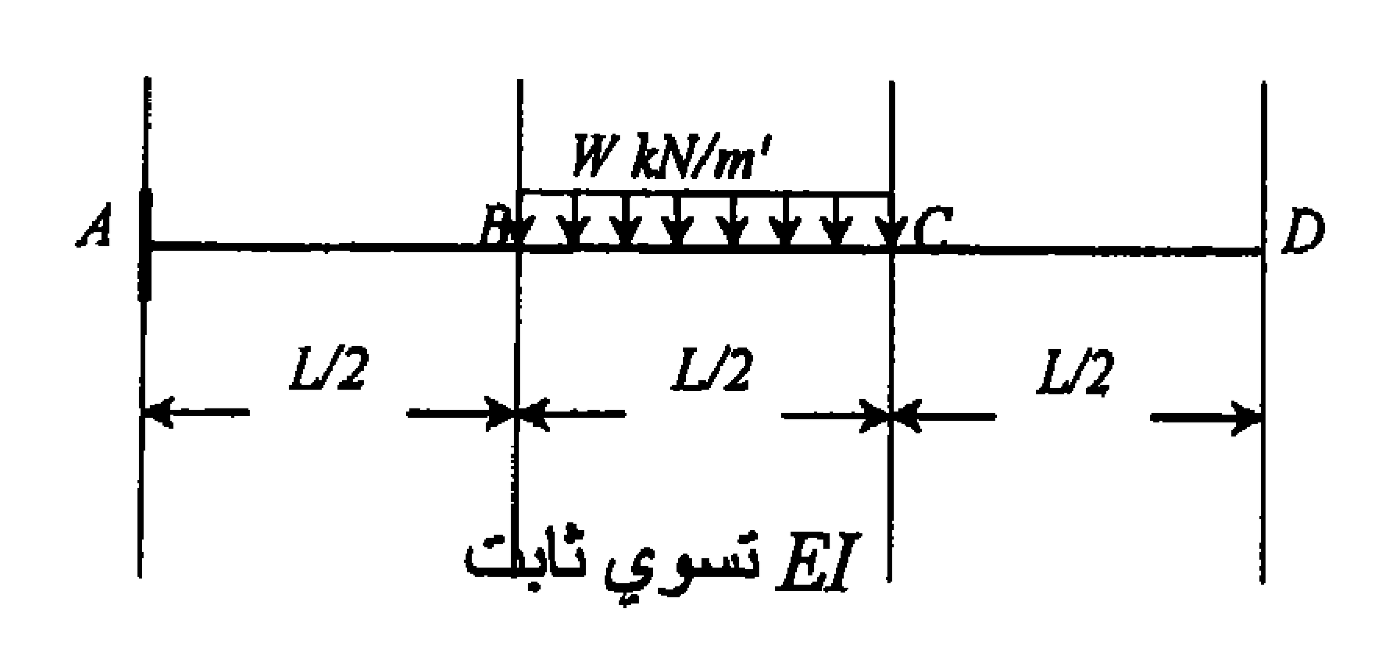
1- ميل المماس عند الطرف C.
2- الإزاحة الرأسية عند الطرف C.
3- " " " المقطع B.
4- ميل المماس عند المقطع B.

اعتبر أن EI تساوي مقدار ثابت.



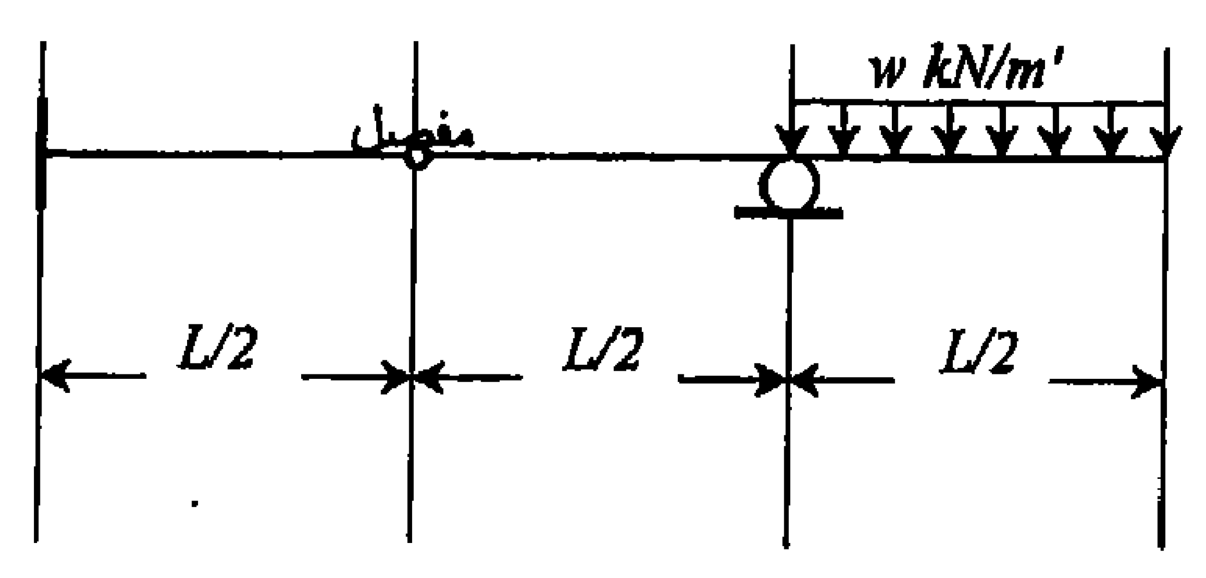
باستعمال العارضة المرافقة أوجد:

1- ميل المماس عند المقطع C.
2- " " " " B.
3- " " " الطرف D.
3- الإزاحة الرأسية عند المقطع B.
3- " " " " C.
4- " " " الطرف B.



للمنشأ الموضح وباستعمال العارضة المرافقة أوجد:

1- الازاحة الرأسية عند المفصل.
2- " " " الطرف الحر.
3- ميل المماس عند الطرف الحر.
4- " " " الرسي التحرك.



3-5 الشغل الافتراضي

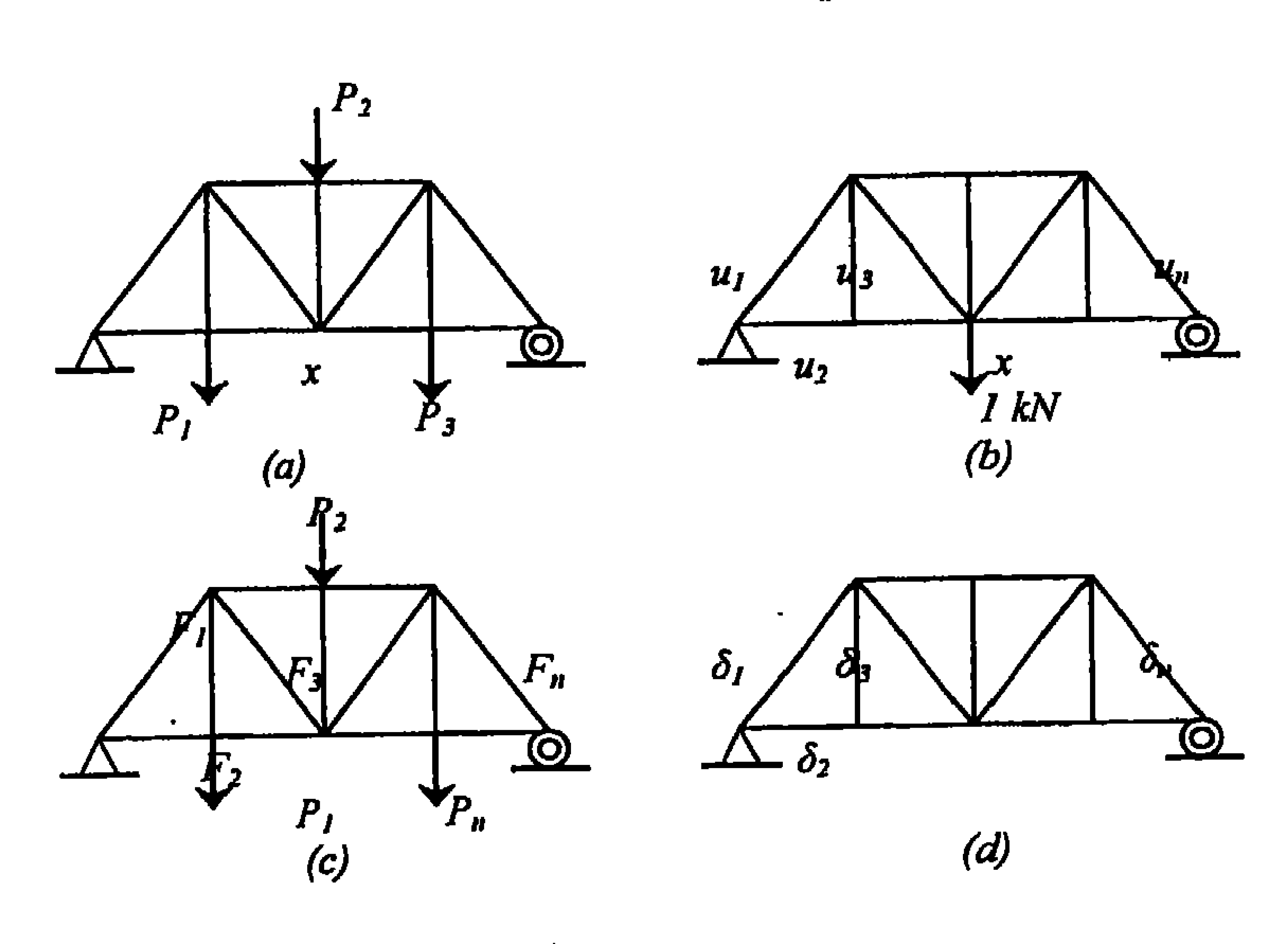
تتميز طريقة الشغل الافتراضي بأنها الأكثر شيوعا وتنوعا لحساب الترخيم والتشوه في المنشآت من هياكل مفصلية وكمرات واطر. ويمكن استخدامها لحساب التشوه الناتج عن الأحمال عل المنشآت أو التشوه الناتج عن التغير في درجات الحرارة أو التشوهات الناتجة عن الأخطاء عند قطع أو صناعة بعض العناصر للمنشأ. وطريقة الشغل الافتراضي تعتمد أساسا على مبدأ بقاء الطاقة. هذا المبدأ أو القانون الذي ينص على أن الشغل الذي تقوم به الأحمال الخارجية يكافىء طاقة الانفعال الداخلية.

وتسمى طريقة الشغل الافتراضي أحيانا بطريقة وحدة الأحمال أو وحدة الأحمال التخيلية.

1-3-5 الهياكل المفصلية

لندرس حالة الهيكل المفصلي التالي:

عندما يتم تحميل الهيكل المفصلي شكل (a) بالأحمال P_3,&P_1, P_2, يتولد قوى محورية داخلية بكل عضو. هذه القوى في الأعضاء تسبب لها زيادة أو نقصان في أطوالها حسب نوع هذه القوى الأمر الذي يسبب بالتالي إزاحة لكل المنشأ. لنفترض أن الإزاحة الرأسية عند النقطة x هي y_x ، هي المطلوب معرفتها وتحديدها ولنفترض أساسا أن خواص الهيكل الهندسية لم تتغير نتيجة الأحمال عليه والتشوه الذي تسببه هذه الأحمال. فمبدأ الشغل الافتراضي تشرحه الخطوات التالية:



1- نفترض أن جميع الأحمال P أزيلت وأزيحت من عل المنشأ.
2- ضع حمل مقداره الوحدة على المفصل x رأسيا إلى أعلى أو إلى أسفل. وباستخدام أي طريقة أوجد القوى الداخلية في الأعضاء المختلفة ولتكن $u_1, u_2, \ldots u_n$ كما هو موضح في الشكل (b).
3- ضع القوى P الخارجية على الهيكل المفصلي. وهي الأخرى حدد القوى الداخلية فيها باستخدام أحد طرق التحليل للهياكل المفصلية ولتكن هذه القوى المحورية $F_1, F_2,\ldots F_n$ كما في شكل (c).
4- بمعلومية القوى F يمكن معرفة التغير في الطول أو التوتر لأي عضو باستخدام علاقة التغير في الطول المعروفة والتي تساوي

(3) ....

وهي $\delta_1 \ldots \delta_n$ الموضحة بالشكل (d).
5- مع وحدة الأحمال وقد وضعت في مكانها، الشغل الافتراضي الخارجي، δW_e المكافىء للشغل الذي

تقوم به وحدة الأحمال نتيجة تحركها عند النقطة x المسافة الحقيقية المرنة والغير معروفة y_x . والذي يساوي:

$$\delta W_e = 1 \cdot y_x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

6- الشغل الافتراضي الداخلي (طاقة الانفعال الافتراضية)، δW_i، يحدث عندما يتعرض كل عضو في الهيكل المفصلي إلى كامل التأثير نتيجة وحدة القوى فيه وبالتالي يمر بمرحلة التوتر والتغير في الطول الذي يساوي δ بسبب الأحمال الخارجية P. والذي يساوي:

$$\delta W_i = \Sigma u_n \cdot \delta_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

7- حيث أن $\delta W_e = \delta W_i$ ، وبالتعويض في المعادلات (4) ، (5) يؤدي إلى:

$$1 \cdot y_x = \Sigma u_n \cdot \delta_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

وحيث أن جميع ضربيات الحدود على يمين المعادلة معلومة فانه يمكن تحديد قيمة التشوه أو الإزاحة الرأسية y_x .

مثال:

أوجد الإزاحة الراسية للفصل B.
افرض أن EA تساوي مقدار ثابت.

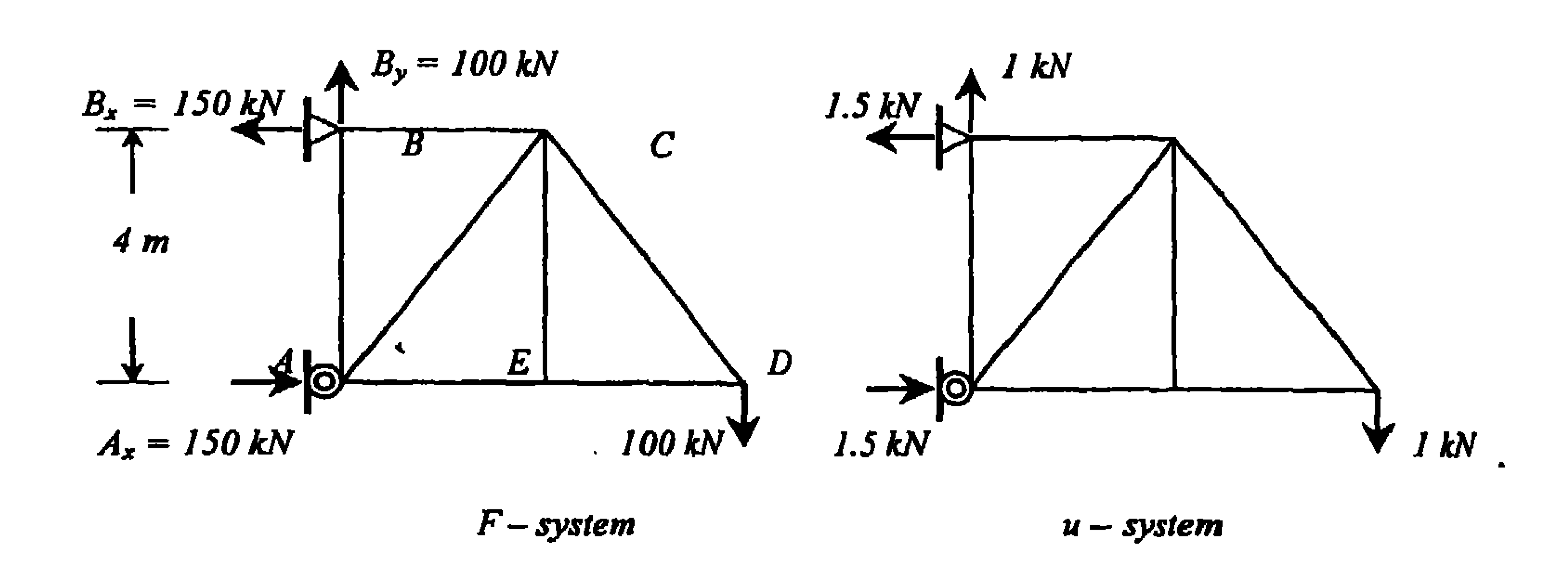
الحل:

من الاستاتيكا يمكن تحديد مقادير القوى الداخلية في الأعضاء المختلفة نتيجة الأحمال على الهيكل المفصلي المعطاة وكذلك نتيجة وحدة أحمال رأسية عند المفصل الذي مطلوب معرفة الإزاحة الرأسية عنده.
نتائج الحسابات مدونة بالجدول التالي. ومنه نجد مقدار الإزاحة المطلوبة.

Member	F kN	u kN	L m	FuL
AB	- 57.74	- 0.5774	5	166.7
BC	- 57.74	- 0.5774	5	166.7
AC	+ 28.87	+ 0.2887	5	41.67
			Σ	375.07

مثال:

للهيكل المفصلي الموضح وباستعمال طريقة وحدة الأحمال أوجد الإزاحة الرأسية للمفصل D.
ردود الأفعال والقوى الحورية في الأعضاء المختلفة تم تحديدها ودونت بالجدول التالي. أرض أن EA تساوي مقدار ثابت لكل الأعضاء.



الحل:

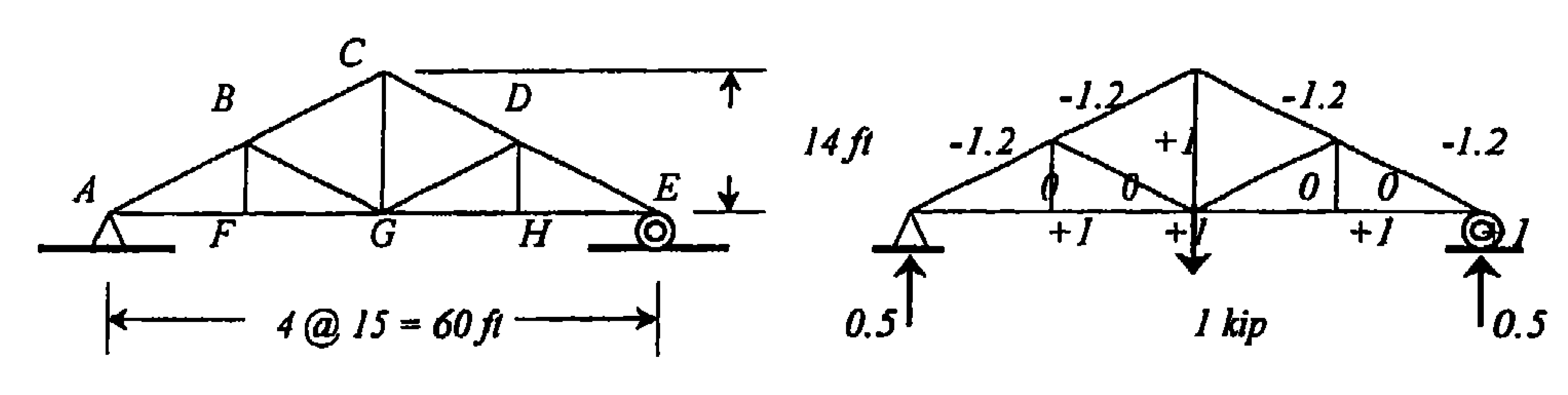
بما أن الحمل المعطى في اتجاه الإزاحة المطلوبة وفي نفس مكانها، عليه فالقوة المحورية المتكونة في الأعضاء نتيجة وحدة القوى ستكون في تناسب مع القوى المتكونة في الأعضاء نتيجة الأحمال المعطاة.
وعليه:

Member	L m	F kN	u kN	FuL
AB	4	+ 100	+ 1	+ 400
AC	5	- 125	- 1.25	+ 781.25
AE	3	- 75	- 0.75	+ 168.75
BC	3	+ 150	+ 1.5	+ 675.00
CE	4	0	0	0
CD	5	+ 125	+ 1.25	+ 781.25
ED	3	- 75	- 0.75	+ 168.75
			Σ	2975.00

$$\therefore \quad \delta_{CV} = \sum$$

مثال:

الأعضاء العلوية القطرية للهيكل المفصلي الموضح تعرضت إلى ارتفاع في درجة حرارتها مقداره 50 °F في حين أن الأعضاء الرأسية والقطرية الأخرى تعرضت إلى زيادة في درجة الحرارة مقدارها 30°F ، أما بقية الأعضاء فلم تتغير درة حرارتها. أوجد الإزاحة الرأسية عند المفصل G باستخدام الشغل الافتراضي علما بأن معامل التمدد الحراري $\alpha = 6 \times 10^{-6}/°F$ لجميع الأعضاء.



منظومة وحدة الأحمال عند المفصل G

الحل:

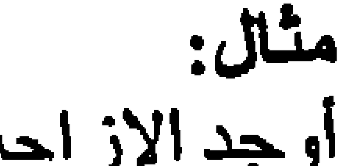
بافتراض وجود وحدة أحمال رأسية عند المفصل G تم تحديد القوى المحورية في الأعضاء المختلفة للهيكل المفصلي. النتائج دونت بالجدول. الأعضاء التي لم تتعرض لتغير في درجة حرارتها أهملت.

$$1 \cdot \delta_{GV} = \Sigma u \cdot L\, \alpha(\Delta T)$$

Member	L in	$\alpha \times 10^{-6}/F$	$\Delta T(°F)$	u	$uL\,\alpha(\Delta T)$
AB	202	6	+ 50	- 1.12	- 0.068
BC	202	6	+ 50	- 1.12	- 0.068
CD	202	6	+ 50	- 1.12	- 0.068
DE	202	6	+ 50	- 1.12	- 0.068
BF	90	6	+ 30	0	0
BG	202	6	+ 30	0	0
CG	180	6	+ 30	+ 1	+ 0.032
DH	90	6	+ 30	0	0
DG	202	6	+ 30	0	0
				Σ	- 0.24

$$1 \cdot \delta_{GV} = -0.24 \quad \Rightarrow \quad \delta_{GV} = 0.24 \text{ in} \uparrow$$

الإشارة السالبة في النتيجة النهائية تدل على أن اتجاه الإزاحة عكس الاتجاه إلي فرض لوحدة الأحمال. وعليه فان المفصل G سيتحرك إلى أعلى.



مثال:

أوجد الإزاحة الرأسية للمفصل A.
افرض أن مقدار EA ثابت لكل الأعضاء.

الحل:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y = 90\ kN \quad \uparrow$

$\sum M @ E = 0 \Rightarrow$

$C_x(3) - 90(4) = 0 \Rightarrow C_x = 120\ kN \rightarrow$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x = 120\ kN \quad \leftarrow$

باستخدام طريقة المفاصل لتحليل الهياكل المفصلية
تم حساب ردود الأفعال عند نقاط التثبيت والقوى المحورية المتولدة بالأعضاء (F) بسبب الأحمال المعطاة. ثم بوضع وحدة أحمال في الاتجاه الرأسي عند المفصل A تم حساب القوى المتولدة في الأعضاء (u) بنفس الطريقة. لاحظ التناسب في المقادير لهذه القوى بسبب أن كليهما في نفس المكان والاتجاه. والجدول التالي يوضح النتائج.

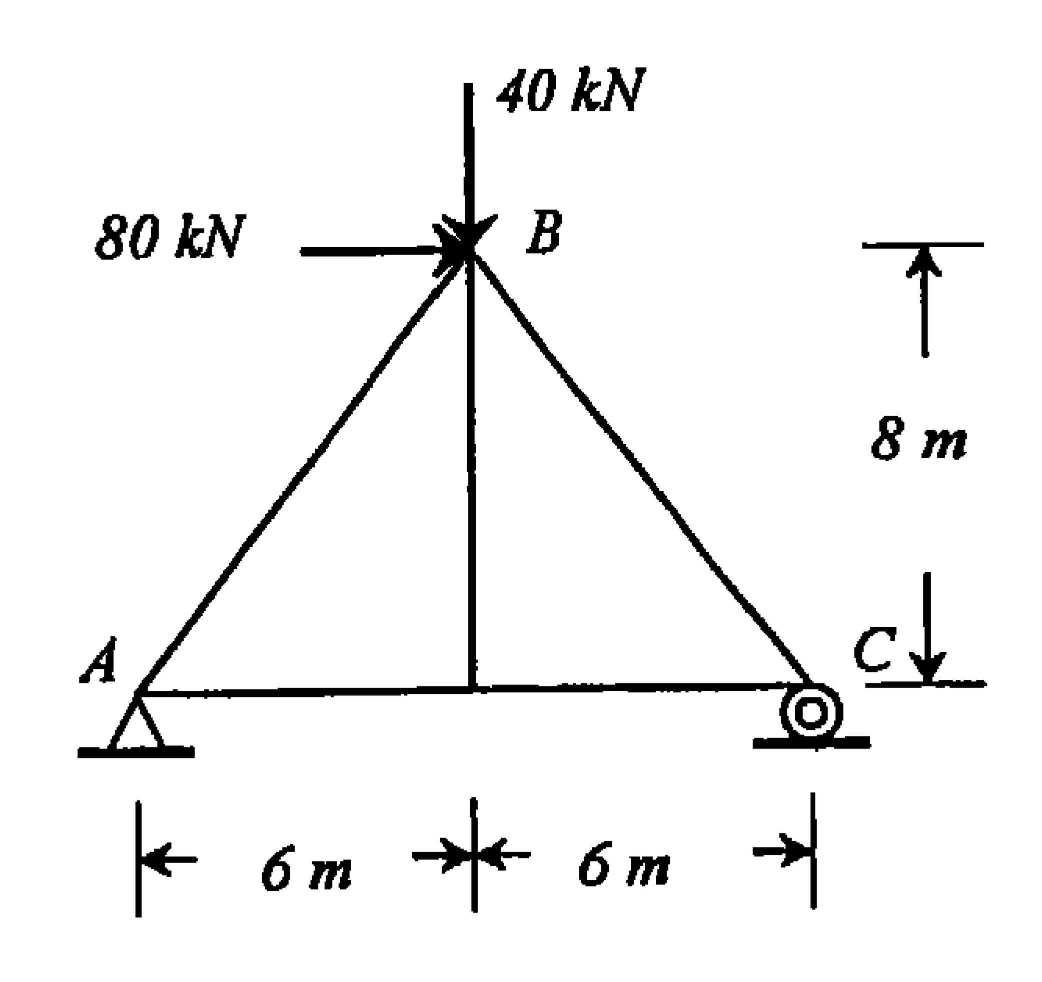
Member	L m	F kN	u kN	FuL
AB	4	- 120	- 1.33	+ 640
AD	5	+ 150	+ 1.67	+ 1250
BC	4	- 120	- 1.33	+ 640
BD	3	- 180	- 2.00	+ 1080
BE	3	- 180	- 2.00	+ 1080
CD	5	+ 150	+ 1.67	+ 1250
CE	5	+ 150	+ 1.67	+ 1250
$\sum$				+ 7190

$\delta_{AV} = \qquad \downarrow$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

تمارين:

1- أوجد الإزاحة الأفقية عند الكرسي B.
افرض أن $E=200(10)^6\ kN/m^2$.
وأن مساحة المقطع لكل الأعضاء تساوي $0.004\ m^2$.



2- ما مقدار الإزاحة الأفقية للمفصل C التي تسببها زيادة في درجة الحرارة مقدارها $50°C$ تعرض لها العضوين BC & AB علما بأن معامل التمدد الحراري $\alpha = 1.2(10)^{-5}/°C$.
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

2-3-5 الأعتاب والأطر

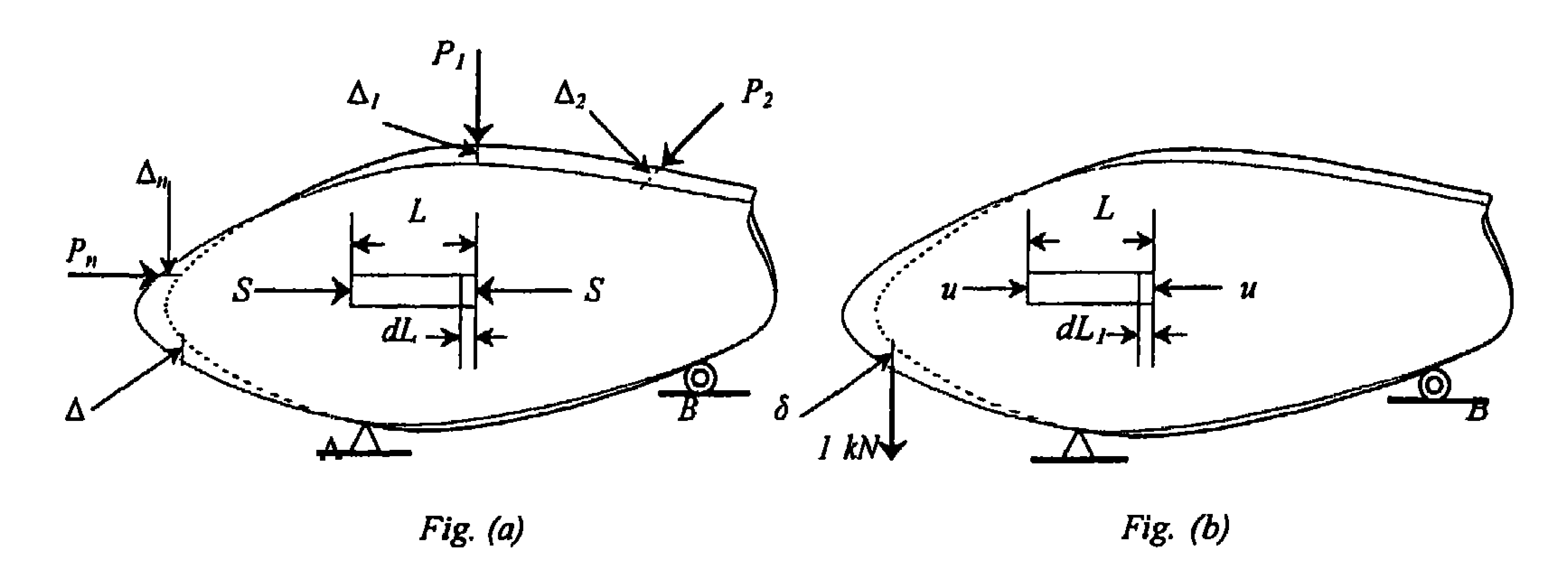


Fig. (a) Fig. (b)

الشغل الذي تم بالأحمال الخرجية = طاقة الانفعال الداخلية

Fig. (a) ⇨ $\frac{1}{2} P_1\Delta_1 + \frac{1}{2} P_2\Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n\Delta_n = \frac{1}{2} \Sigma S\cdot dL$ .... (1)

Fig. (b) ⇨ $\frac{1}{2} (1)(\delta) = \frac{1}{2} \Sigma u\cdot dL_1$ .... (2)

على افتراض أن الحالة (b) موجودة أولا، عليه

$$\frac{1}{2} (1)(\delta) + \frac{1}{2} P_1\Delta_1 + \frac{1}{2} P_2\Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} P_n\Delta_n + (1)\Delta$$
$$= \frac{1}{2} \Sigma u\cdot dL_1 + \frac{1}{2} \Sigma S\cdot dL + \Sigma u\cdot dL \quad \dots\dots\dots (3)$$

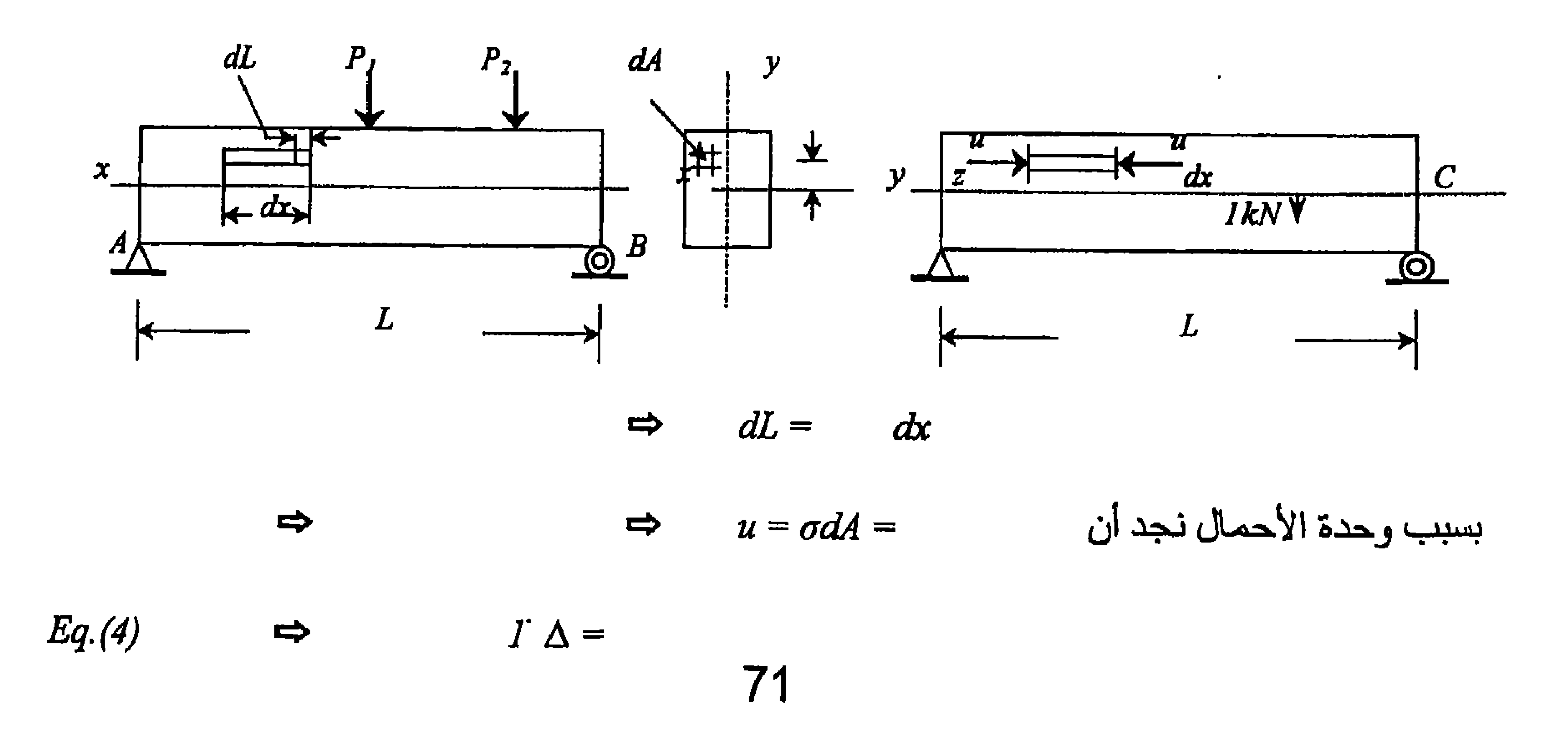
من المعادلات [(1) + (2)] – (3) نجد أن

$$(1)\Delta = \Sigma u\cdot dL \quad \dots\dots\dots (4)$$

يمثل الحد u (1) الشغل الافتراضي، بينما Δ dL يمثل الشغل الحقيقي. في حالة البحث عن الدوران أو ميل المماس يستعمل وحدة عزوم،

$$(1)\ \theta = \Sigma u\cdot dL$$

في حالة العوارض أو الأطر فانه لدينا:



⇨ $dL = \quad dx$

بسبب وحدة الأحمال نجد أن $u = \sigma dA =$ ⇨ ⇨

Eq.(4) ⇨ $1\cdot\Delta =$

وعليه:

Δ .... (5)

مثال:

أوجد الإزاحة عند المفصل A على افتراض أن EI ثابتة المقدار.

B w A L

الحل:

من الأحمال المعطاة نجد أن:

$M_x = -wx(x/2) = -\frac{1}{2}wx^2$

1 kN x

من وحدة الأحمال نجد أن:

$m_x = m = -(1)x = -x$

$$\delta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI}dx \qquad =$$

حيث أن الجواب موجب فان الطرف A ينحرف إلى أسفل.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

مثال:

للكابولي الموضح أوجد الإزاحة بالطرف الحر.

A B C 20 kN 2I I 5 m 4 m

الحل:

180 kN.m 20 x 20 kN

$0 \le x \le 5$

$M_1 = 20x - 180$ and $m_1 = x - 9$

9 kN.m 1 kN 1 kN x

$0 \le x \le 4$

$M_2 = -20x$ & $m_2 = -x$

$$\delta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI}dx =$$

$=$ $\qquad$ $=$

$=$ $\qquad$ $=$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

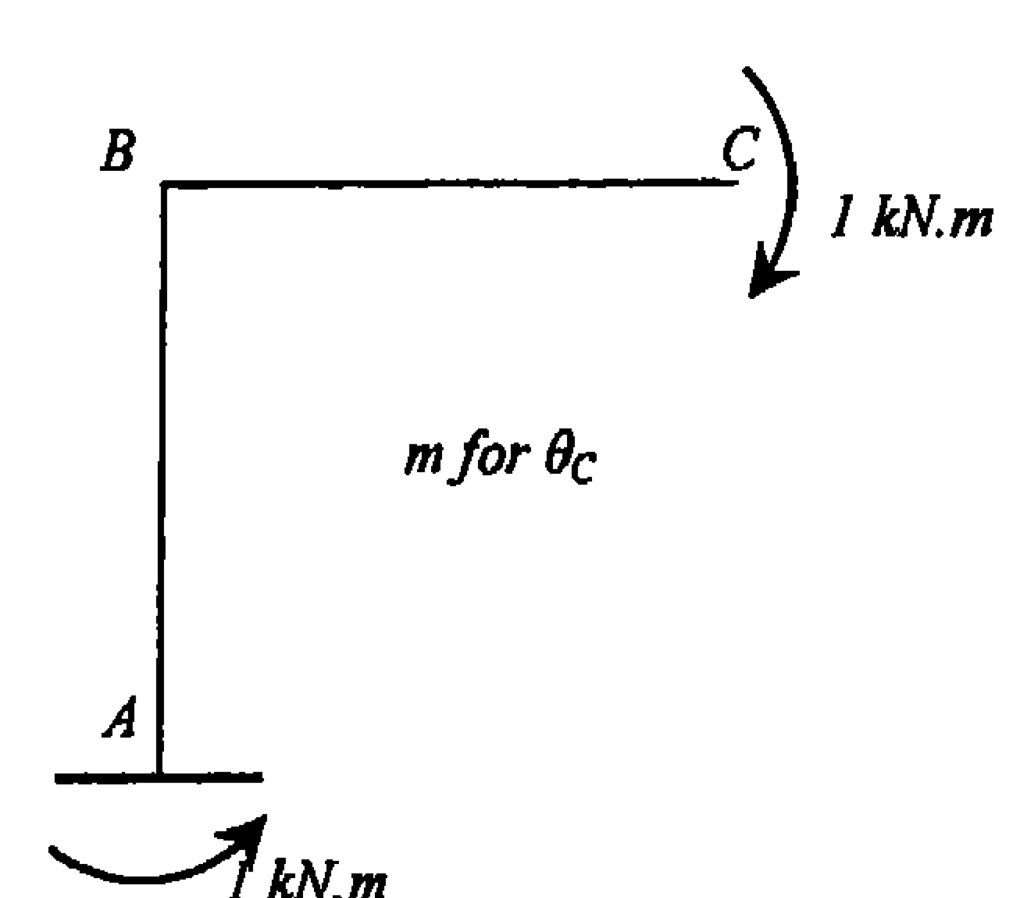
مثال:

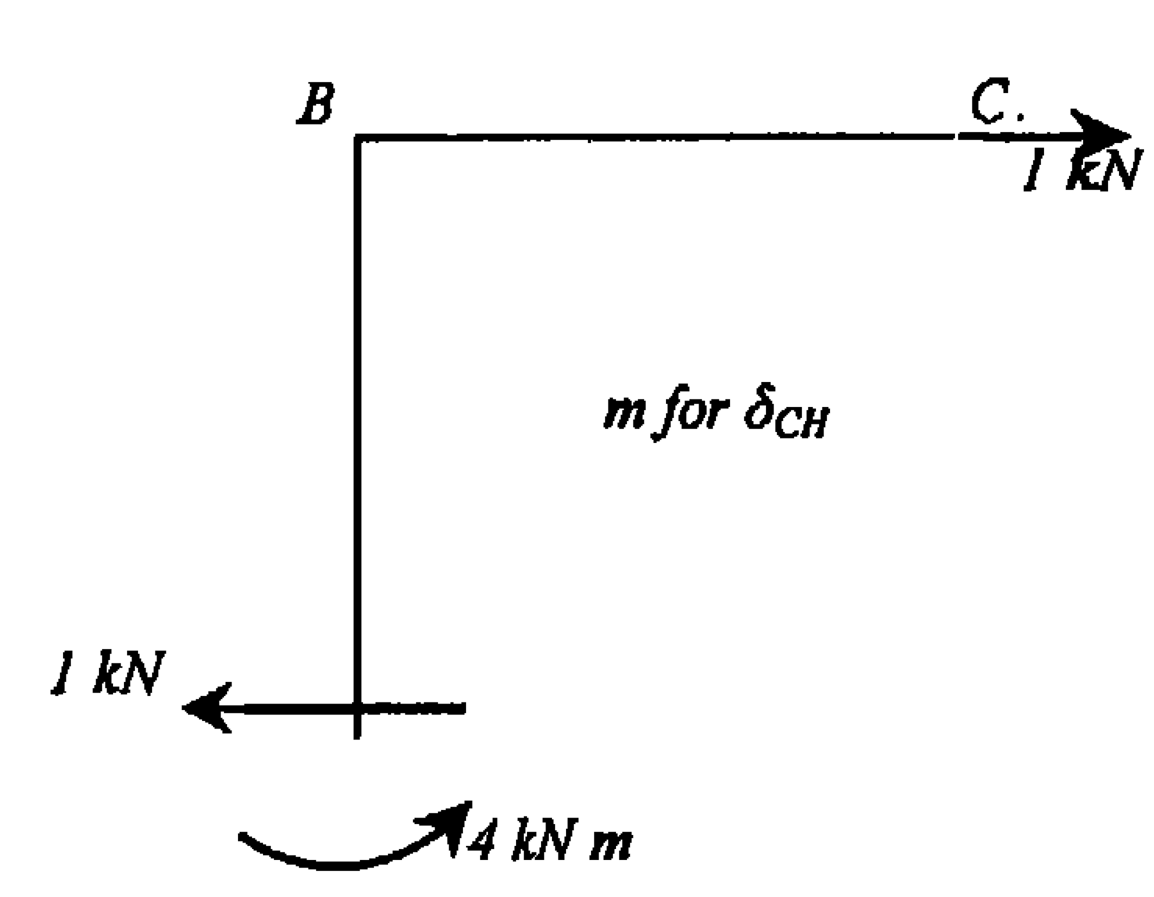
باستخدام وحدة الأحمال، أوجد الانحراف الأفقي والدوران عند الطرف C.
افرض أن مقدار EI ثابت.

5 kN/m'
x
B
4 m
C
50 kN
4 m
منظومة – M
X
A
240 kN.m

الحل:

من تطبيق قوانين الاتزان حسبت ردود الأفعال ووضعت على المنشأ كما هو موضح.
ومن الأحمال وجدت قيم العزم M للمناطق المختلفة للمنشأ. ثم وجدت قيم m الناتجة عن تحميل المنشأ بوحدة أحمال عند الطرف C حيث المكان والاتجاه المطلوب حساب الإزاحة فيه.
ودونت النتائج في جدول لتسهيل الراجعة.





Part	Origin	Limits	M	m for δ_{CH}	m for θ_C
AB	A	$0 \rightarrow 4$	-240	$x - 4$	-1
BC	C	$0 \rightarrow 4$	$-50x - 5/2x^2$	0	-1

EI $\qquad + 0$

$\therefore \quad \delta_{CH} = \quad \rightarrow$ أي أن الطرف يتحرك إلى اليمين

θ_C

$EI\,\theta_C =$

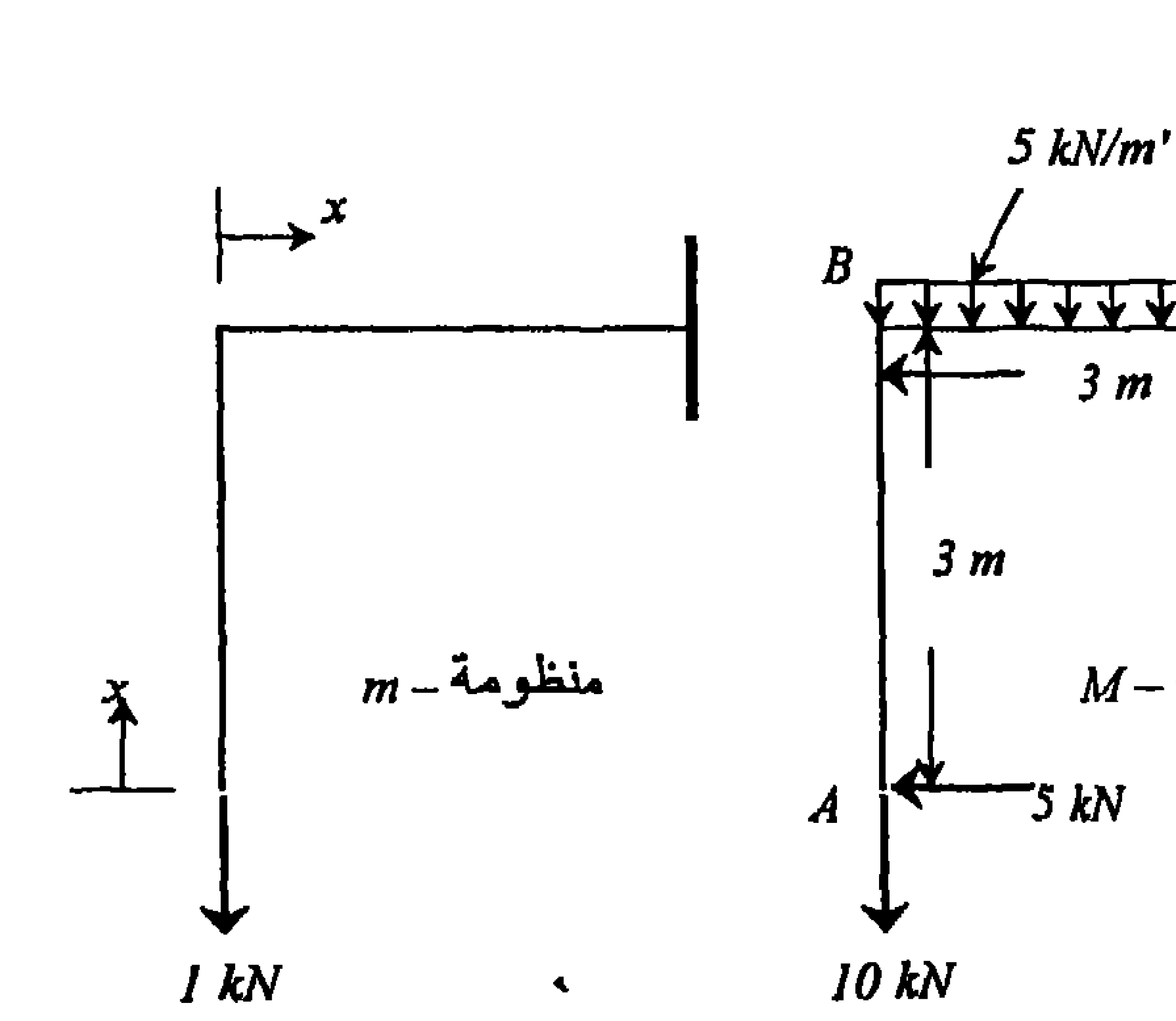
$\therefore \quad \theta_C = \quad \circlearrowright$ أي أن الطرف يلف في اتجاه عقارب الساعة

مثال:

أوجد الإزاحة الرأسية عند الطرف A علما بأن:

$E = 200 \times 10^6\ kN/m^2;$

$I = 50 \times 10^6\ mm^2$



الحل:

حسبت العزوم M الناتجة عن الأحمال وكذلك العزوم الناتجة عن وحدة الأحمال m التي وضعت في المكان والاتجاه المطلوب معرفة الإزاحة فيه. وقد دونت النتائج في جدول لتسهيل المراجعة والعودة.

Part	Origin	Limits	M	m for δ_{AV}
AB	A	$0 \rightarrow 3$	$5x$	0
BC	C	$0 \rightarrow 3$	$15 - 10x - 5/2x^2$	$-x$

$EI\,\delta_{AV} =$

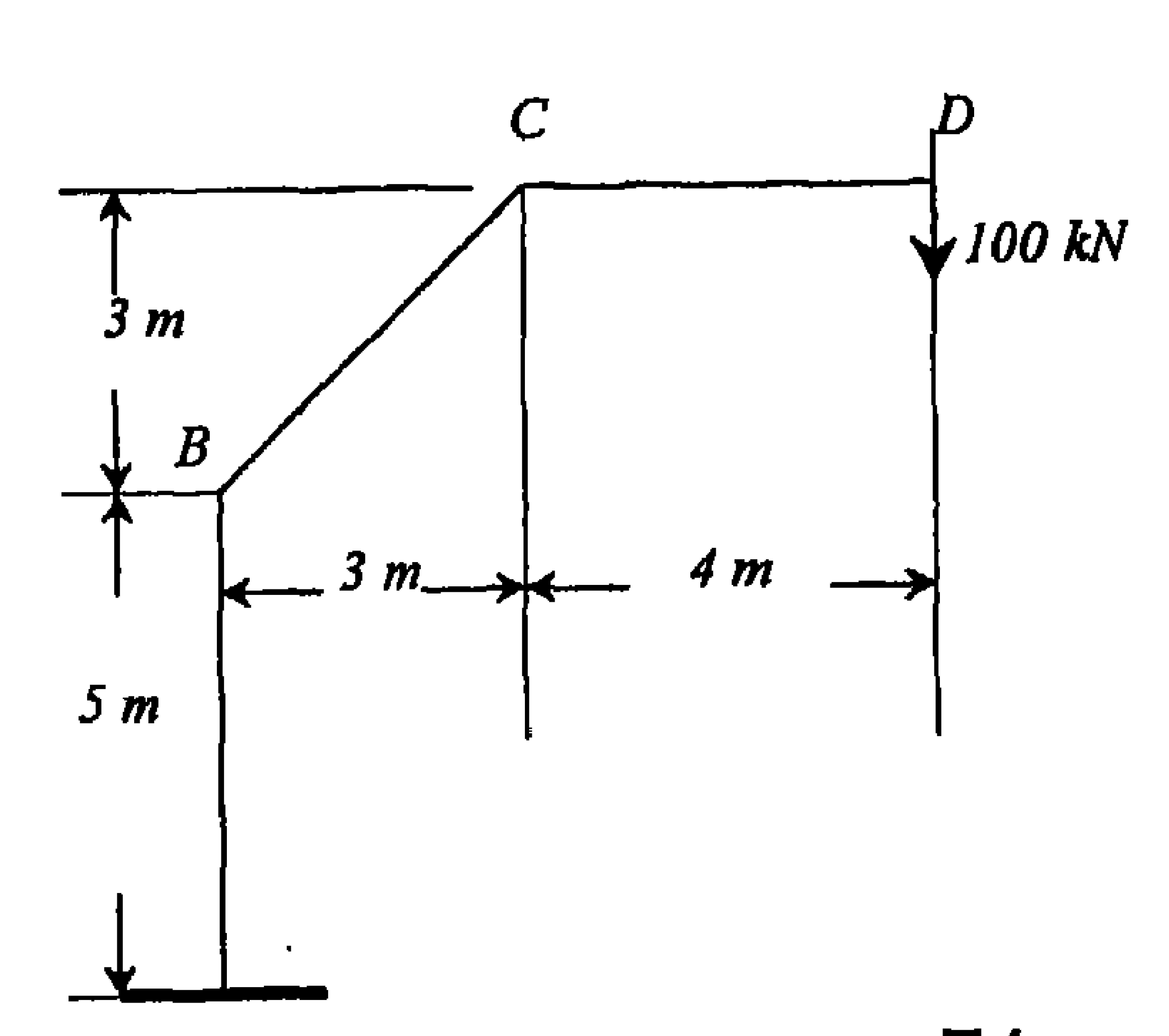
$\therefore \delta_{AV} = - \qquad = - \qquad m$

$= 2.25\ mm \uparrow$ أي أن النقطة تنحرف إلى أعلى

تمرين:

للإطار الموضح أوجد الدوران والإزاحة الأفقية للمفاصل $B, C, \& D$ باستخدام طريقة وحدة الأحمال.

افرض أن قيمة EI تساوي مقدار ثابت.



6 الباب السادس

خطوط التأثير للكمرات

تعرف خطوط التأثير بأنها عرض توضيحي يظهر الأثر على أي دالة كالقوة المحورية أو القص أو عزم الانحناء الناتج عن تحرك وحدة الأحمال المركزة على طول الكمرة. هذا العرض يساعد على اختيار المكان المناسب على الكمرة الذي ينتج عنه وصول هذه الدالة إلى أقصى قيمة لها والتي يحتاج لها عند التصميم. **ويجب ملاحظة أن هذا العرض التوضيحي لخطوط التأثير لأي دالة لمقطع أو نقطة على الكمرة عندما تتحرك وحدة الأحمال المركزة وتأخذ أي مكان على طول الكمرة.**

مثال:

استنتج التعبيرات اللازمة لكل من $R_A, V_D, \& M_D$ نتيجة حمل مركز متحرك عندما يكون على بعد x كما هو موضح.

الحل:

عندما

$$0 \le x \le L + a$$

$$R_A = + \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

وهي معادلة خط مستقيم يمكن أن يوصل بين نقطتين معلومتين.

لحساب قوة القص V_D يجب مراعاة مكان القوة P اذا كانت يسار أو يمين النقطة D.

عندما

$$0 \le x < b$$

$$V_D = R_A - P = + \frac{P(L-x)}{L} - P \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

عندما

$$b < x \le L + a$$

$$V_D = R_A = + \frac{P(L-x)}{L} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

بالنسبة للعزم M_D كذلك يجب مراعاة موضع القوة المركزية إذا كانت يسار أو يمين النقطة D.

عندما

$$0 \le x \le b$$

$$M_D = R_A b - P(b-x) = \frac{P(L-x)}{L} b - P(b-x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

وعندما

$$b \le x \le L + a$$

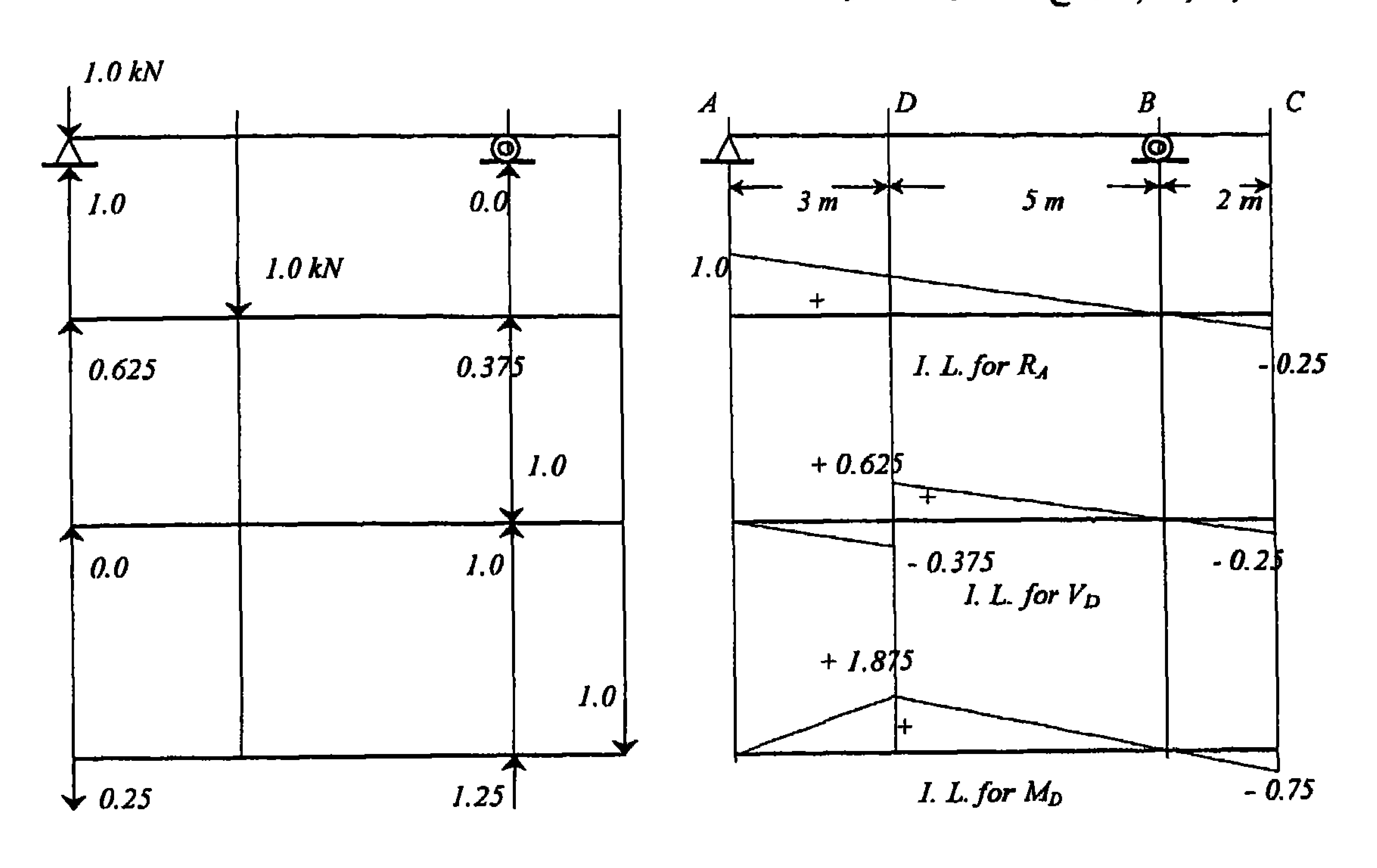
$$M_D = R_A b = \frac{P(L-x)}{L} b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

مثال:

للمثال السبق ارسم منحنيات R_A, V_D, & M_D لخطوط التأثير للقيم $L = 8\ ms$, $b = 3\ ms$, & $a = 2\ ms$.

الحل:

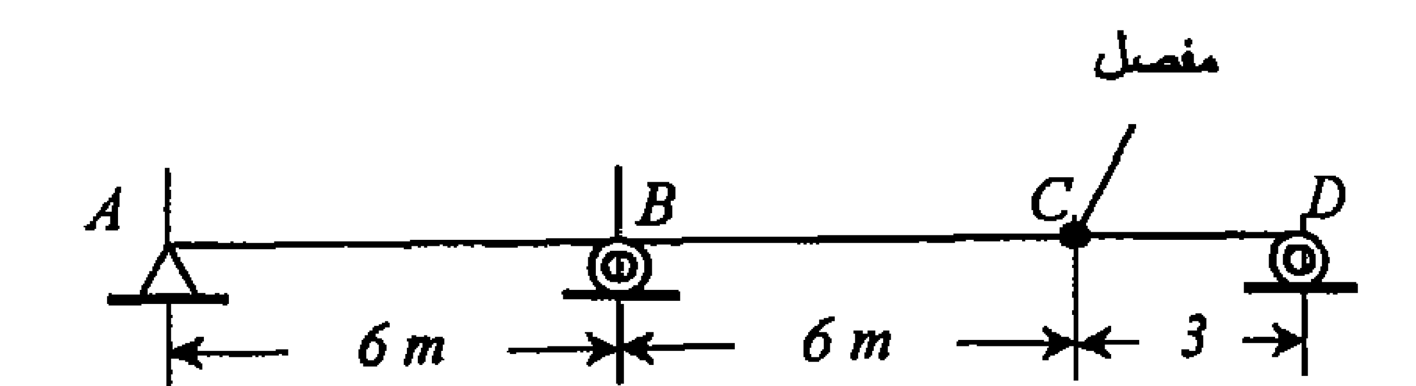
بالتعويض في المعادلات السابقة عن قيم L, b, & a لكل دالة ووضع الحمل المركز $P = 1.0\ kN$ عند النقاط A, B, C, & D ينتج المنحنيات التالية:



تمارين:

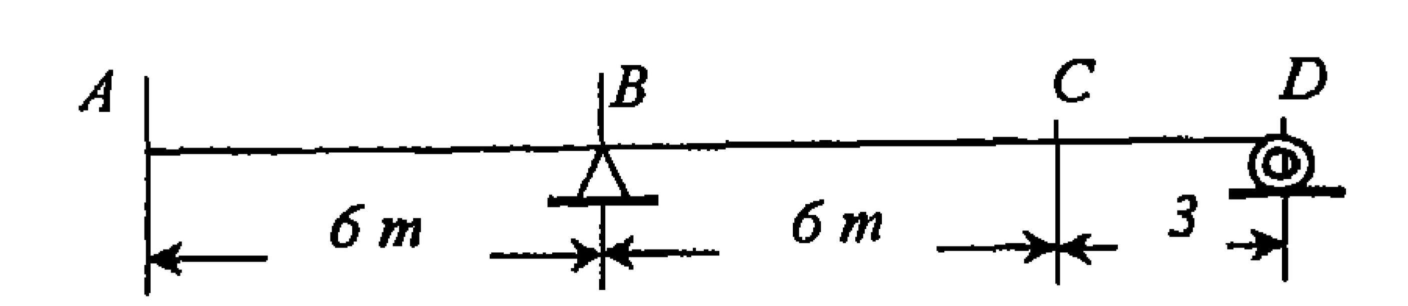
للعارضة الموضحة، ارسم خطوط التأثير لكل من:

R_A, R_B, R_D, M_B & V_C.



للعارضة الموضحة، ارسم خطوط التأثير لكل من:

R_B, R_D, M_B & V_C.



6-1 تطبيقات خطوط التأثير

عندما يتوفر منحنى خطوط التأثير لأي دالة فان قيمة هذه الدالة نتيجة استعمال أو تحميل الكمرة بأي منظومة من الأحمال المركزة يمكن الحصول عليها بضرب قيمة كل حمل في الاحداثي الرأسي المناظر لمكانه بمنحنى خط التأثير على الكمرة.

وبالعودة مثلا إلى المثال السابق فان رد الفعل عند الكرسي A وقوة القص وعزم الانحناء عند D نتيجة حمل مركز مقداره $100\ kN$ وضع عند C ستكون كما يلي:

$$R_A = 100(-0.25) = -25 \Rightarrow R_A = 25\ kN \downarrow$$
$$M_D = 100(-0.75) = -75 \Rightarrow M_D = 75\ kN.m \curvearrowright$$
$$V_D = 100(-0.25) = -25 \Rightarrow V_D = 25\ kN \uparrow$$

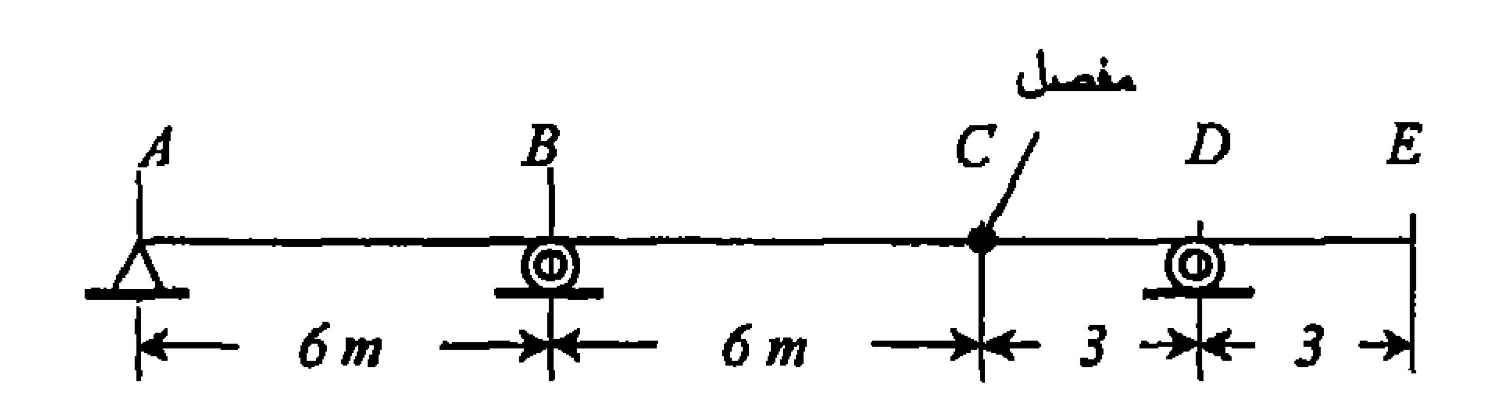
وإذا كانت $P = 100\ kN$ ووضعت على بعد 6 أمتار يمين الكرسي A نحصل على النتائج التالية:

$$R_A = 100(0.25) = 25\ kN \uparrow$$
$$M_D = 100(0.75) = 75\ kN.m \curvearrowleft$$
$$V_D = 100(0.25) = 25\ kN \downarrow$$

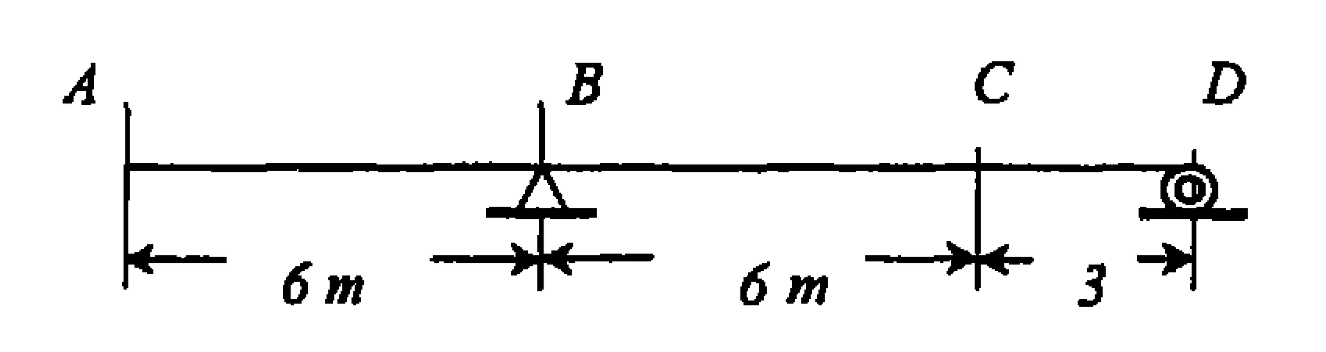
~~~~~~~~~~~~~~~~~~

تمارين:

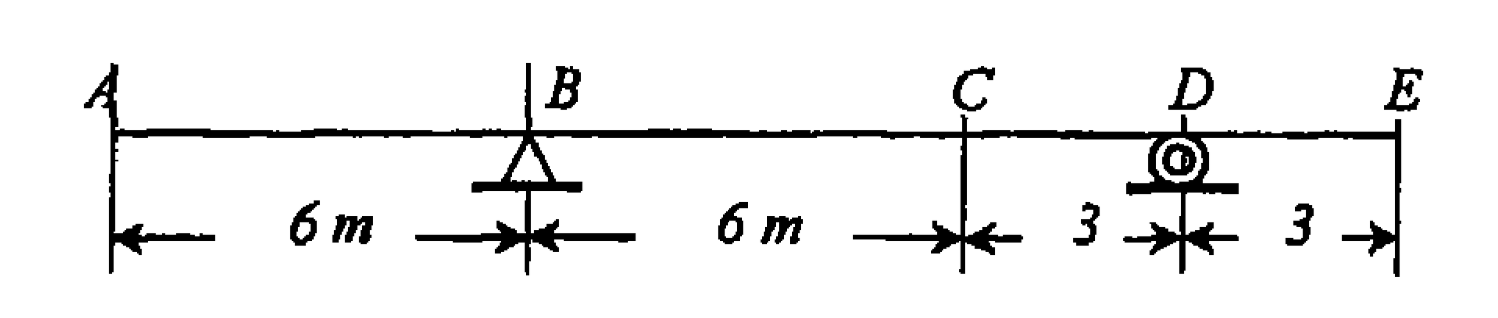
ارسم خطوط التأثير للكمرة الموضحة لكل من R_A, R_D, V_C, M_B & M_D ثم أوجد أقصى قيمة لكل من R_A, R_B, R_D, V_C, M_B, & M_D تسببها قوة مركزة قيمتها $50\ kN$.



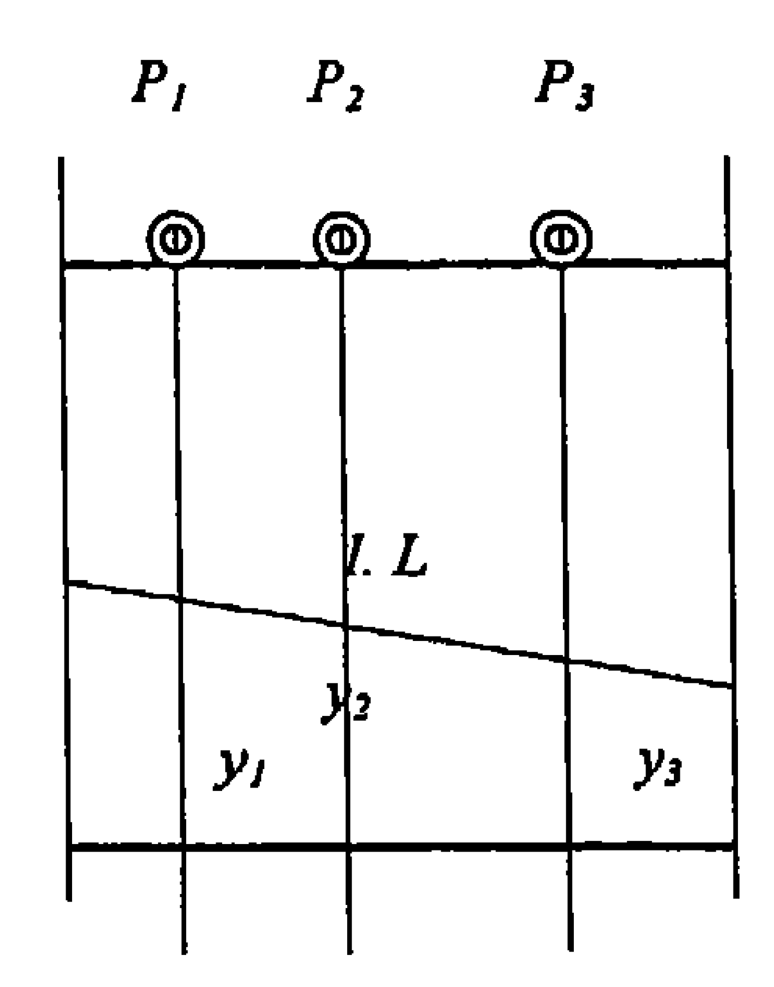
ارسم خطوط التأثير للكمرة الموضحة لكل من $R_B, R_D, V_C,$ & M_B ثم أوجد أقصى قيمة لكل منها تسببها قوتين مركزتين مقدار الواحدة منهما $40\ kN$ والمسافة بينهما مترين.

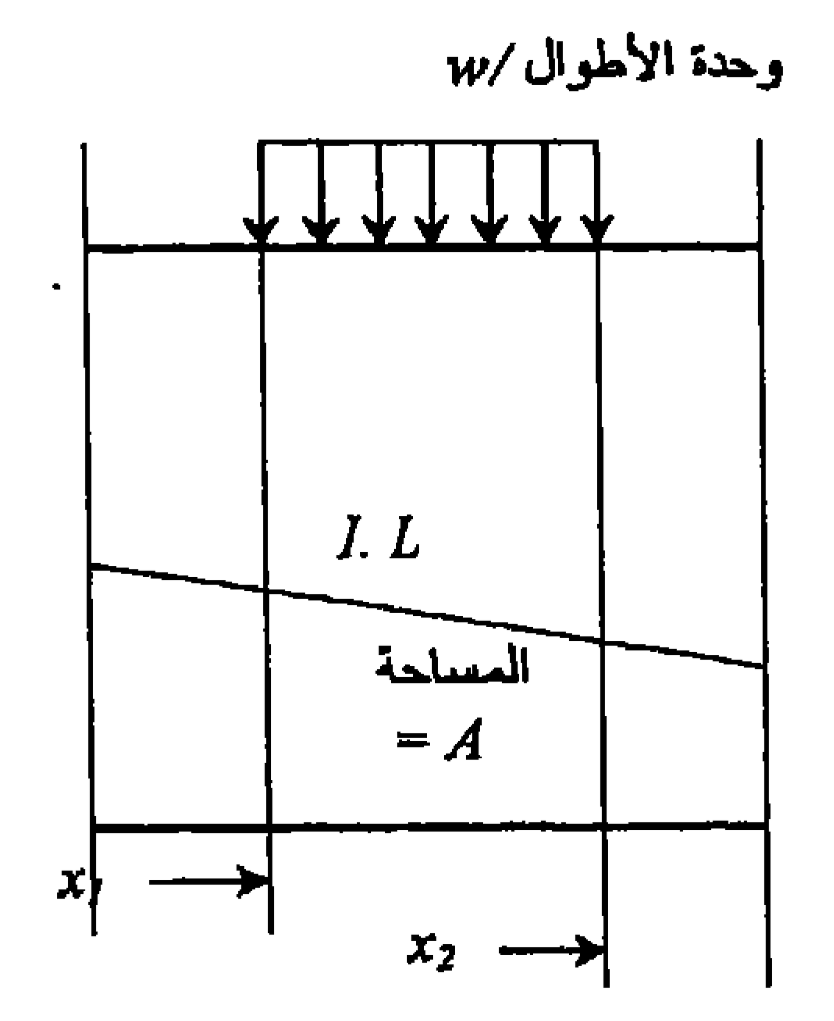


ارسم خطوط التأثير للكمرة الموضحة لكل من R_B, R_D, V_C, M_D & M_B ثم أوجد أقصى قيمة لكل منها تسببها قوتين مركزتين مقدار الواحدة منهما $40\ kN$ والمسافة بينهما مترين.


~~~~~~~~~~~~~~~~~~

2-6 خطوط التأثير للأحمال الموزعة





عندما تكون الأحمال المركزة عبارة عن مجموعة متتالية، يكون مقدار الدالة الكلي كما سبق تعريفه كما يلي:

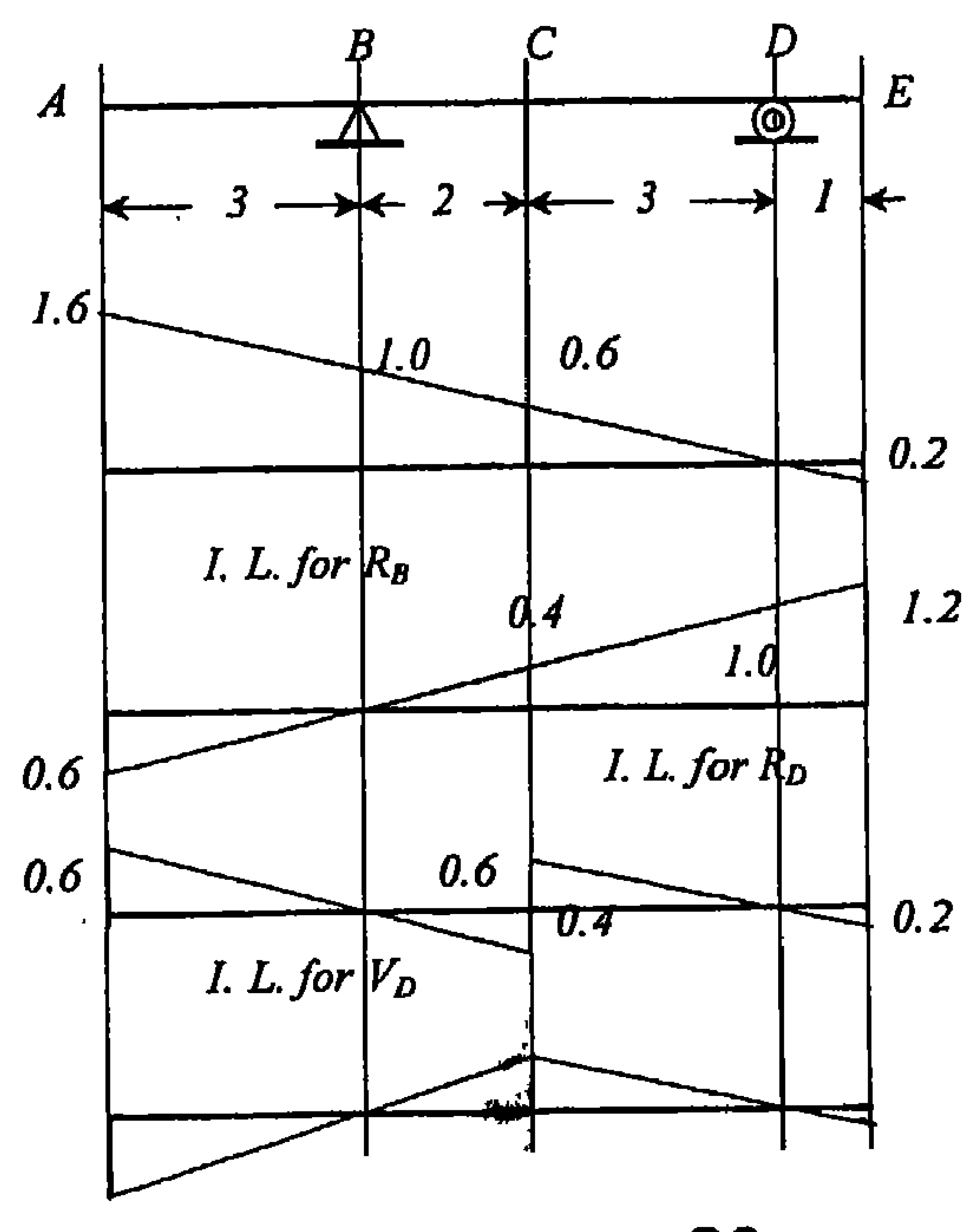
$$P_1 \times y_1 + P_2 \times y_2 + \dots\dots\dots = \sum Py \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(6)$$

ومن ناحية أخرى، إذا كان على العارضة أحمال منتظمة التوزيع وذات طول محدد على العارضة، فان مقدار الدالة سيكون:

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(7)$$

تستخدم المعادلتين (6) & (7) لتعيين المكان على العارضة لوضع الأحمال التي ينتج عنها القيمة القصوى لأي دالة ونوع إشارتها موجبة كانت أو سالبة. وللتأكد من صحة النتائج يمكن العودة إلى المبادىء الأساسية وقوانين الاتزان لحساب أي دالة.

مثال:
استخدم خطوط التأثير لتحديد أقصى قيمة موجبة وأقصى قيمة سالبة للقص والعزوم عند المقطع C الناتجة عن حمل مركز قيمته $10\ kN$ وحمل منتظم موزع ثابت الكثافة مقدارها $5\ kN/m'$.

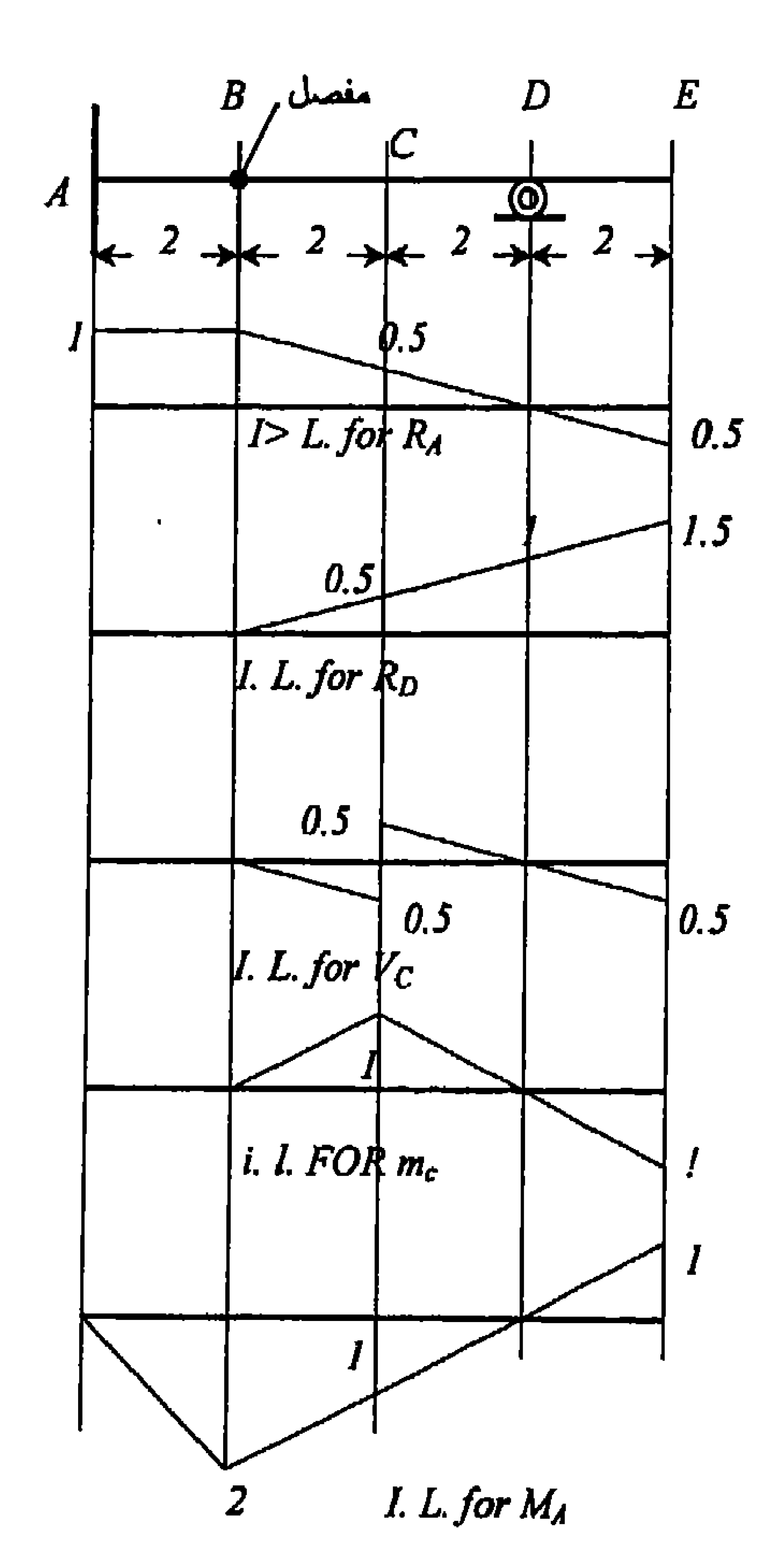


الحل:
لتعيين القص والعزوم عند أي نقطة يلزم أولا تحديد مقدار ردود الأفعال عند الكرسي B & D.
خطوط التأثير لردي الفعل R_D & R_B :
بوضع وحدة أحمال عند B نحصل على

رد فعل مقداره $1\ kN$ عند B ورد فعل مقداره صفر عند الكرسي D.
ووضع وحدة الأحمال عند A ينتج عنه رد فعل يساوي $1.6\ kN$ عند B ورد فعل عند D يساوي $0.6\ kN$ –
و هذا المقدار تم الحصول عليه من معادلة الاتزان $\sum F_Y = 0 = R_B + R_D - 1$.
وضع وحدة الأحمال عند D ينتج عنه رد فعل يساوي الصفر عند B بينما يكون رد الفعل عند D يساوي $1.0\ kN$

مثال:

ارسم خطوط التأثير للكمرة الموضحة لكل من $R_A,\ R_D,\ V_C,\ M_A\ \&\ M_C$ ثم أوجد المنطقة التي يمكن أن توضع عليها الأحمال لينتج عنها أقصى قيمة مطلقة لكل من القص والعزوم عند المقطع C وأقصى عزم عند نقطة الارتكاز A إذا كانت كثافة الحمل الموزع $w = 10\ kN/m'$.



الحل:

خطوط التأثير عند الكرسي A $I.\ L.\ for\ R_A$:

وحدة الأحمال بين $B\ \&\ A$:

$$\curvearrowright \sum M_B = 0\ (right) \Rightarrow 4R_D = 0 \Rightarrow R_D = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_A = 1\ kN \uparrow$$

وحدة الأحمال عند D:

$$R_D = 1 \quad \& \quad R_A = 0$$

خطوط التأثير عند الكرسي D $I.\ L.\ for\ R_D$:

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_A + R_D = 1 \Rightarrow R_D = 1 - R_A$$

خطوط التأثير عند الكرسي C $I.\ L.\ for\ R_C$:

عندما تكون وحدة الأحمال بين $A\ \&\ C$ يحدث أن:

$$V_C = -R_D \quad \text{(من اليمين)}$$

عندما تكون وحدة الأحمال بين $C\ \&\ E$ يحدث أن:

$$V_C = R_A \quad \text{(من اليسار)}$$

خطوط التأثير لعزم الانحناء عند C $I.\ L.\ for\ M_C$

عندما تكون وحدة الأحمال بين $A\ \&\ C$ يحدث أن:

$$M_C = 2 \cdot R_D$$

عندما تكون وحدة الأحمال بين $C\ \&\ E$ يحدث أن:

وحدة الأحمال عند D:

$$M_C = 0$$

خطوط التأثير لعزم الانحناء عند A I. L. for M_A

عندما تكون وحدة الأحمال عند A يحدث أن:

$$M_A = 0$$

وعندما تكون وحدة الأحمال عند B يحدث أن:

$$M_A = 2 \cdot R_A$$

عندما تكون وحدة الأحمال بين C & E يحدث أن:

$$\curvearrowright \sum M_B = 0 \text{ (يسار)} \quad \Rightarrow$$

$$2 \cdot R_A + M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -2 \cdot R_A$$

القيمة القصوى المطلقة للقص تصل عندما يتم تحميل الكمرة بالحمل الموزع الذي كثافته $w = 10\ kN/m'$ على الأجزاء DE & BC حيث خطوط التأثير لهذه الأجزاء متشابهة الإشارة كما يظهر في المنحنى وهي سالبة. وعليه:

V_C القصوى $= -10\times$ المساحة تحت المنحنى لخطوط التأثير

$= -10 \times [2(½)/2 + 2(½)/2] = 10\ kN\ (-ve)$.

M_C القصوى $= 10\times$ المساحة تحت المنحنى لخطوط التأثير

$= 10\times(½)(1)(4) = 20\ kN.m\ (+ve)$.

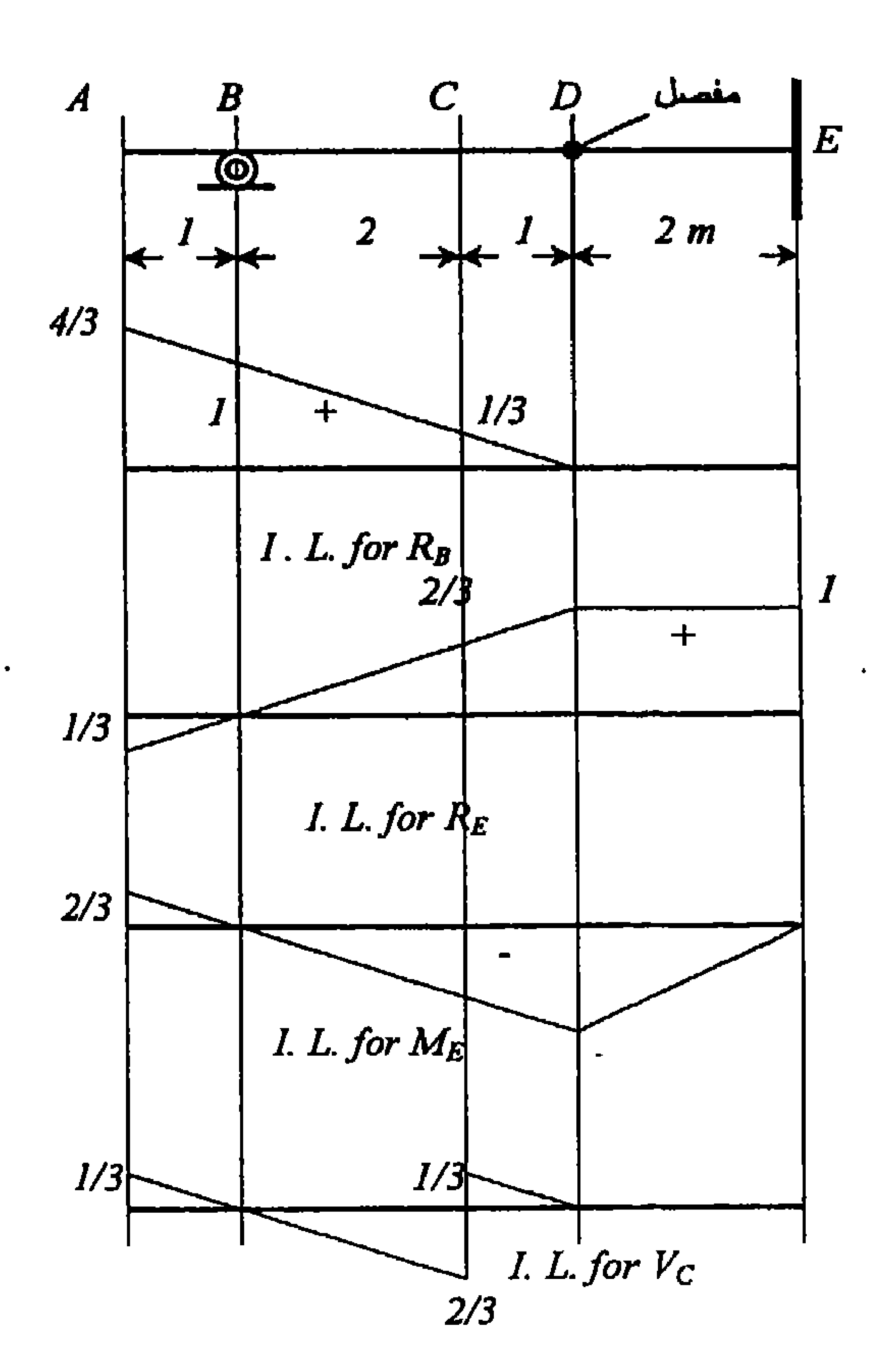
M_A القصوى $= 10\times$ المساحة تحت المنحنى لخطوط التأثير

$= 10\times(½)(2)(6) = 60\ kN.m\ (-ve)$.

مثال:

ارسم منحنيات التأثير لردود الفعل عند B & E والقص والعزم عند C.

أوجد أقصى قيمة لكل من V_C وM_E التي يسببها حمل منتظم مركز كثافته $30\ kN$.



الحل:

عندما تكون وحدة الأحمال بين A & D يحدث أن:

$$\curvearrowright \sum M_D(right) = 0$$

$$-M_E - 2R_E = 0 \Rightarrow M_E = -2R_E$$

عندما تكون وحدة الأحمال عند D يحدث أن:

$$M_E = -(1)(2) = -2$$

عندما تكون وحدة الأحمال عند E يحدث أن:

$$M_E = 0$$

عندما تكون وحدة الأحمال بين A & C يحدث أن:

$$V_C = -R_E$$

عندما تكون وحدة الأحمال بين C & E يحدث أن:

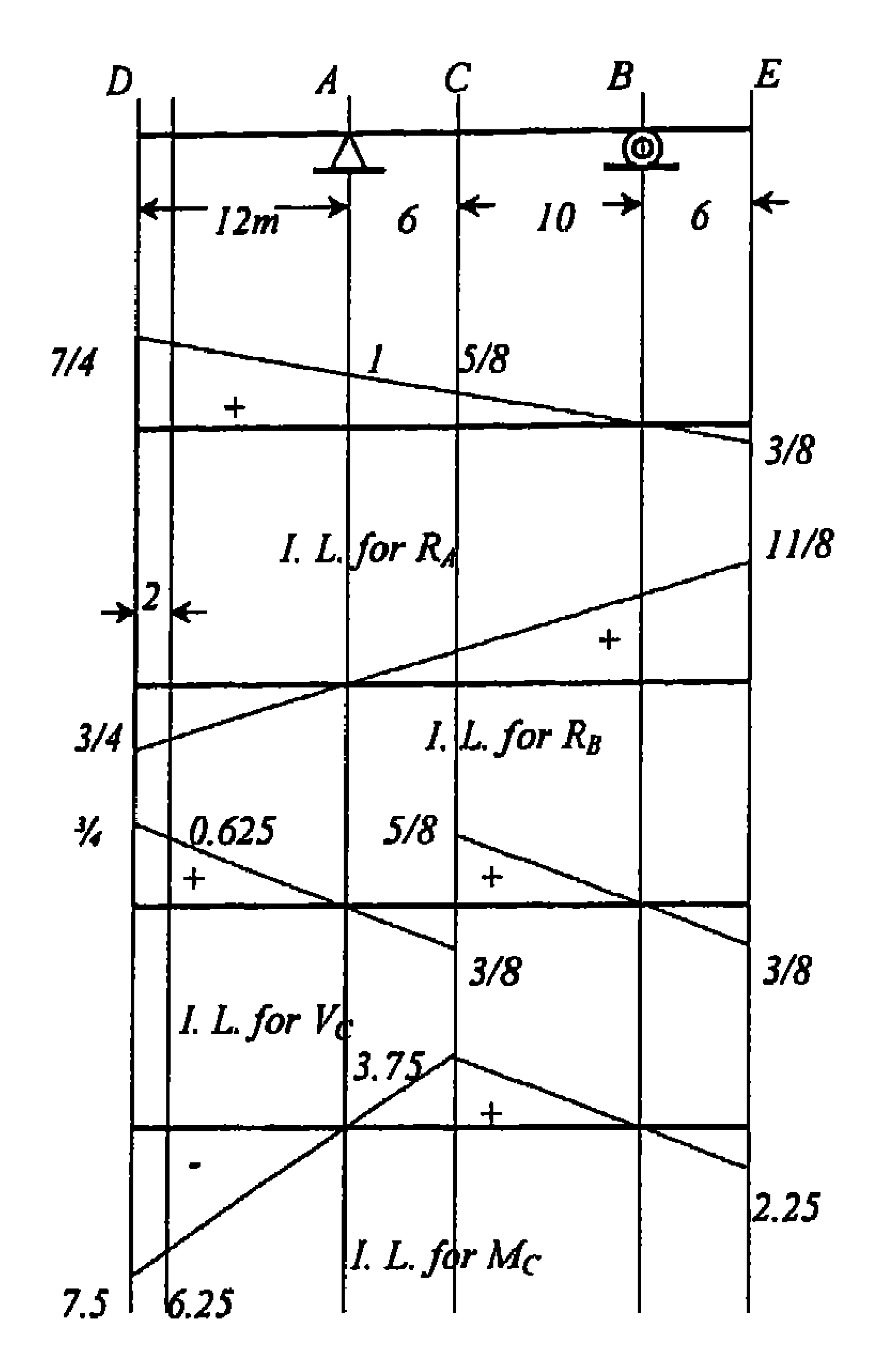
$$V_C = R_B$$

V_C القصوى $= 15(½)(2)(⅔) + 30(⅔)$

$= 30\ kN\ (-ve)$

M_E القصوى $= 15(½)(5)(2) + 30(2)$

$= 135\ kN.m\ (-ve)$



مثال:

أوجد أقصى مقدار مطلق للقص والعزم عند المقطع C للكمرة الموضحة التي يحدثها حمل منتظم موزع كثافته $w = 12\ kN/m'$ ومعه حملان مركزان مقيدان ببعضهما والبعد بينهما $2\ ms$ وقيمة كل واحد منهما $40\ kN$.

الحل:

استخدام خطوط التأثير من أفضل الطرق لحل مثل هذه المسألة.

رسم منحنيات خطوط التأثير لردود الأفعال عند نقاط الارتكاز تساعد وتسهل رسم منحنيات التأثير للقص والعزم المطلوبة.

خطوط التأثير لردود الأفعال عند الكراسي A & B :I. L. for R_A & R_B

عندما تكون وحدة الأحمال عند A يحدث أن:

$R_A = 1 \quad \& \quad R_B = 0$

عندما تكون وحدة الأحمال عند B يحدث أن:

$R_B = 1 \quad \& \quad R_A = 0$

مد المستقيم AB على جانبيه يعطي خطوط التأثير لردي الفعل R_B & R_A.

خطوط التأثير للقص عند C :I. L. for V_C

عندما تكون وحدة الأحمال بين D & C يحدث أن:

$V_C = -R_B$

عندما تكون وحدة الأحمال بين E & C يحدث أن:

$V_C = R_A$

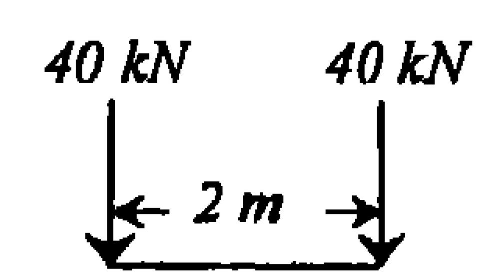
خطوط التأثير للقص عند C :I. L. for M_C

عندما تكون وحدة الأحمال بين D & C يحدث أن:

$M_C = 10\ R_B$

عندما تكون وحدة الأحمال بين E & C يحدث أن:

$V_C = 6R_A$



لحمل منتظم كثافته $w = 12\ kN/m'$ مع الحملين المركزين يحدث الآتي:

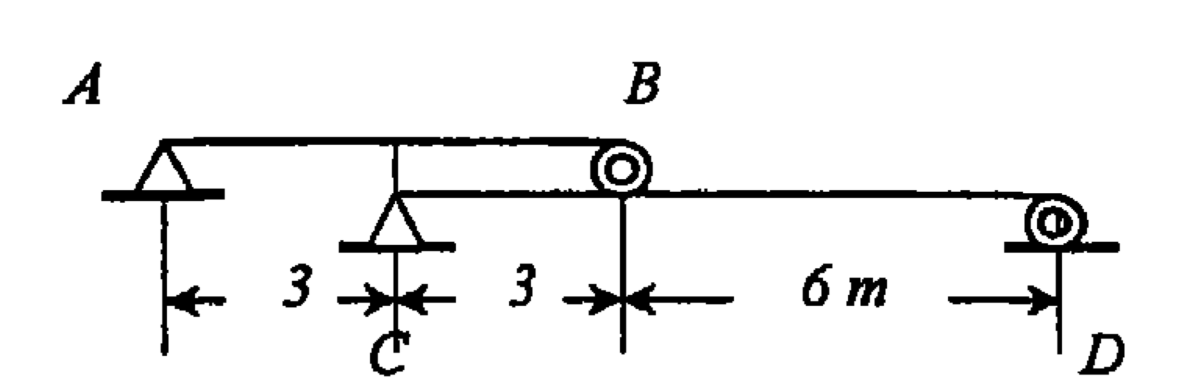
للحصول على أقصى مقدار لكل من القص والعزم M_C & V_C نضع الحملين بحيث يكون أحدهما منطبقا على أقصى ارتفاع تحت منحنى خطوط التأثير. ونضع الحمل الموزع على الأجزاء من العارضة المتشابهة الإشارة. وعليه مثلا، نضع احد الحملين المركزين على D والآخر سيكون على بعد مترين من ناحية اليمين للأول، ونضع الحمل المنتظم الموزع على CB & DA للحصول أقصى مقدار للقص، بينما للحصول على أقصى مقدار للعزوم فنضع الحمل الموزع على الجزئين BE&DA.

Max. V_C = kN (+ve)

Max. M_C = kN.m (-ve) ↶

تمارين:

1) للكمرة الموضحة، ارسم خطوط التأثير لكل من R_A, R_C, R_D, V_B & M_B عندما تتحرك وحدة الأحمال من A إلى D.



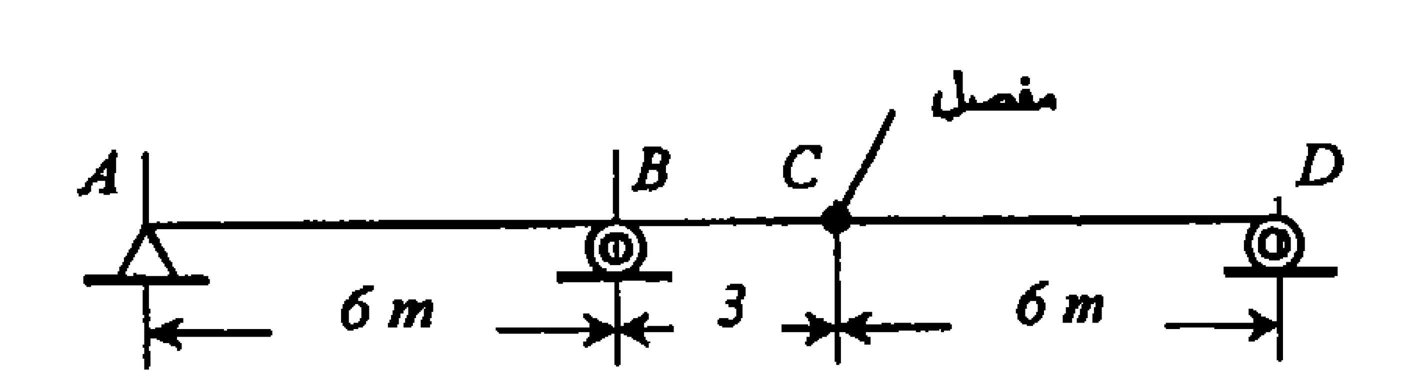
2) استخدم خطوط التأثير لتحديد مقادير ردود الأفعال عند نقاط التثبيت والقص عند B & C وعزوم الانحناء عند كل من B & D التي تسببها:

أ) حمل مركز قيمته $50\ kN$.

ب) حملين مركزين قيمة كل منهما $50\ kN$ والمسافة بينهما متران.

ج) عين القيمة المطلقة القصوى لكل من القص وعزم الانحناء التي تنتج عن حمل مركز مقداره $80\ kN$ مع حمل منتظم موزع كثافته $20\ kN/m'$.

3) للعارضة الموضحة، ارسم منحنى خطوط التأثير لكل من R_A, R_B, R_D, V_C & M_B.
أوجد أقصى مقدار للقص V_C وأقصى مقدار للعزم M_B الناتج عن تحميل العارضة بحمل منتظم موزع كثافته $15\ kN/m'$ ومعه حمل مركز مقداره $60\ kN$.



7 المحتويات

الباب الخامس : ترخيم المنشآت

الباب السادس : خطوط التأثير للكمرات

أساسيات الإنشاءات

التحليل الإنشائي للمنشآت المحددة استاتيكيا






ISBN977-287-847-X
9 789772 87847X

تصميم : جمال خليفة

دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع
٥٠ شارع الشيخ ريحان - عابدين- القاهرة
☎ ٢٧٩٥٤٢٢٩
www.sbh-egypt.com
e-mail : sbh@link.net

دار اشبيليه للطباعة والنشر والتوزيع
ليبيا - بني وليد
☎ 00218913712204